Relación 1: Estadística Descriptiva unidimensional

1. En una zona de Almería, la superficie de las viviendas sigue la siguiente distribución:

Superficie (m^2)	Frecuencia relativa *(porcentaje)*
50-60	20
60-70	25
70-80	15
80-100	25
100-120	15

   Calcúlese:

   (a) La superficie media por vivienda.

   (b) La varianza de esta muestra.

2. Un automovilista participa en una competición en la cual obtiene, para los distintos recorridos, las siguientes velocidades medias:

Recorrido	Distancia (Km.)	Velocidad media (Km/h)
A-B	400	50
B-C	600	60
C-A	1000	100

   Calcúlese la velocidad media conseguida en la competición.

3. Un automovilista participa en una competición en la cual obtiene, para los distintos recorridos, las siguientes velocidades medias:

Recorrido	Duración del recorrido (Horas)	Velocidad media (Km/h)
A-B	8	50
B-C	10	60
C-A	10	100

   Calcúlese razonadamente la velocidad media conseguida en la competición.

4. Una empresa agrícola tiene 5 fincas dedicadas a la producción de trigo. Las producciones y rendimientos obtenidos son los siguientes:

Finca	Producción (Qm)	Rendimiento (Qm/Ha)
A	2500	10
B	3000	20
C	4000	25
D	6000	15
E	7000	14

Calcúlese el rendimiento medio por Ha. para el conjunto de las fincas.

5. Un grupo de alumnos ha obtenido las siguientes notas en Matemáticas e Historia:

MATEMÁTICAS		HISTORIA	
NOTAS	INDIVIDUOS	NOTAS	INDIVIDUOS
1	0	1	5
2	10	2	4
3	15	3	6
4	20	4	15
5	30	5	50
6	10	6	15
7	10	7	3
8	5	8	2

Determínese para qué asignatura el grupo es más homogéneo.

6. En una prueba de velocidad de lectura realizada a 30 estudiantes, se obtuvieron los siguientes resultados (en palabras por minuto)

58 76 45 88 93 45 63 56 101 97
52 78 110 89 64 95 49 102 96 58
65 77 95 62 71 83 86 91 58 105

Calcula:

(a) La mediana y los cuartiles primero y tercero.

(b) ¿A qué percentil le corresponde una velocidad lectora de 75 palabras por minuto?

7. Un curso está dividido en cuatro grupos, de los cuales tenemos los siguientes datos:

Grupo	N^o de alumnos	Nota media	Varianza
A	30	6	1
B	40	6.5	1.69
C	50	5	0.81
D	60	4	0.64

Se pide:

(a) Calcular la nota media para todo el curso.

(b) Calcular los coeficientes de variación de cada grupo.

(c) ¿Qué grupo resulta más homogéneo?

(d) Calcular la varianza de todas la notas del curso.

8. Las calificaciones obtenidas por treinta alumnos en un ejercicio de Matemáticas han sido

$$8\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 2\ 9\ 3\ 6\ 5\ 4\ 8\ 8\ 7\ 5\ 5\ 1\ 1\ 1\ 2\ 1\ 4\ 4\ 6\ 6\ 1\ 1\ 2\ 7$$

Calcula los coeficientes de asimetría y curtosis y haz una reflexión sobre los resultados obtenidos.

9. En una empresa metalúrgica los empleados se clasifican en tres categorías: técnicos, especialistas y administrativos. El número de empleados, el salario medio mensual y la varianza de los salarios de cada categoría en el mes de Diciembre de 1987 son los que aparecen en en siguiente cuadro:

Categoría	Número de empleados	Salario medio mensual (miles de pesetas)	Varianza de los salarios (millones de pesetas)
Técnicos	20	200	400
Especialistas	100	120	49
Administrativos	40	100	25

I.- Calcúlese el salario medio para el conjunto de la empresa y la dispersión relativa de los salarios.

II.- En la discusión para fijar los salarios de 1988 han sido propuestas tres alternativas:

A: La elevación de todos los salarios en un 5%.

B: La elevación de todos los salarios en 5500 pts mensuales.

C: La elevación de los salarios según el siguiente baremo: 4% a los técnicos, 5% a los especialistas, y 5,5% a los administrativos.

a) Calcular los salarios medios que resultan de aplicar las tres alternativas y la dispersión relativa en cada caso.

b) ¿Cuál de las tres alternativas tiene mayor efecto para reducir la dispersión relativa inicial de los salarios para el conjunto de la empresa?

Relación 2: Estadística Descriptiva bidimensional

1. A partir de los datos

X	Y	X	Y	X	Y
1	2	3	1	4	1
2	3	4	6	5	2
2	1	1	6	5	6
3	4	2	5	1	6
5	3	5	1	6	2
4	2	4	2	5	1
1	6	4	5	4	2
3	4	4	1	6	5

obtenidos al lanzar dos dados simultáneamente, siendo X el resultado de lanzar el primer dado e Y el resultado obtenido al lanzar el segundo dado, construir la tabla de frecuencias y calcular:

(a) Las medias marginales

(b) La covarianza

(c) El porcentaje de valores pares obtenidos con el segundo dado, cuando se ha obtenido un tres con el primero.

2. Dada la siguiente distribución bidimensional de frecuencias:

$X \backslash Y$	1	2	3	4	5
100	2	4	6	10	8
200	1	2	3	5	4
300	3	6	9	15	12
400	4	8	12	20	16

Calcular:

(a) La media marginal de X y las medias condicionadas de X para cada valor de Y.

(b) La media marginal de Y y las medias condicionadas de Y para cada valor de X.

(c) La covarianza.

(d) La varianza marginal de X y la varianza condicionada de X al valor $Y = 4$.

(e) La varianza marginal de Y y la varianza de Y condicionada a $X = 200$.

(f) ¿Son estadísticamente independientes X e Y?

3. Las notas de Física (X) y Matemáticas (Y) obtenidas por 10 alumnos son las siguientes:

X	Y	X	Y
9	8	5	6
7	5	10	10
3	4	8	9
6	2	2	1
7	9	5	6

(a) Estimar los parámetros de la recta de regresión de Y sobre X.

(b) Estimar los parámetros de la recta de regresión de X sobre Y.

(c) Calcular el coeficiente de correlación lineal de Pearson entre X e Y.

(d) Representar gráficamente ambas rectas de regresión.

(e) Para un alumno que haya obtenido un 4 en Física, ¿Qué nota se le podría pronosticar en Matemáticas?

(f) Para un alumno que haya obtenido un 7 en Matemáticas, ¿Qué nota le pronosticarías en Física?

4. En la estimación de los parámetros de un modelo de regresión lineal se han obtenido los siguientes valores:

$$\overline{x} = 5, \quad \overline{y} = 8, \quad cov(x, y) = 15, \quad \sigma_y^2 = 20, \quad r^2 = 0.9 \ .$$

A partir de los resultados anteriores, calcular:

(a) La varianza de X.

(b) La recta de regresión de Y sobre X.

(c) La recta de regresión de X sobre Y.

5. A partir de una distribución bidimensional de las variables X e Y hemos calculado la recta de regresión de Y sobre X, con el siguiente resultado:

$$y = 5 + 3x \ .$$

(a) Estimar los parámetros de la recta de regresión de X sobre Y, teniendo en cuenta que en la regresión anterior el coeficiente de correlación obtenido ha sido de $r = 1$.

(b) ¿Qué pensarías si te dijeran que en dicha regresión de Y sobre X el coeficiente de correlación obtenido ha sido de $r = -1$?

6. A partir de un conjunto de datos sobre las variables X e Y se ha calculado la recta de regresión de Y sobre X, obteniéndose los siguientes resultados:

$$y = 10 + 0.45x, \quad r^2 = 0.9, \quad \overline{x} = 20 \ .$$

Estimar los parámetros de la recta de regresión de X sobre Y.

7. Supongamos que el par de variables (X, Y) toma los siguientes valores: (1,0), (-1,0), (0,1) y (0,-1). Calcular las rectas de regresión de X sobre Y y de Y sobre X. A la vista de los resultados obtenidos, extraer las conclusiones oportunas sobre el comportamiento de ambas variables.

8. En un cierto experimento se observaron los siguientes valores de un determinado par de variables:

X	Y	X	Y
-5	1	-4	5
-3	4	-2	7
-1	10	0	8
1	9	2	13
3	14	4	13
5	18		

Calcular la recta de regresión de Y sobre X. ¿Cuánto vale el coeficiente de correlación?

9. En una cierta empresa se han observado los rendimientos de producción durante cierto número de años, obteniéndose los siguientes resultados:

Año (X)	Rendimiento (Y)
1957	0.93
1958	0.99
1959	1.11
1960	1.33
1961	1.52
1962	1.60
1963	1.47
1964	1.33

Un especialista sostiene que la relación que existe entre la variable Año y la variable Rendimiento es $Y = aX^2 + bX + c$. Calcular los valores de a, b y c utilizando el método de los mínimos cuadrados.

10. Se va a realizar un estudio en una población de 50 individuos en el que se van a considerar dos variables, las cuales presentan 6 y 4 modalidades respectivamente. Construir una tabla suponiendo que ambas variables son independientes.

Relación 3: Combinatoria

1. ¿De cuántas formas podemos colocar 2 trabajos que constan de 3 volúmenes y otros dos que constan de 4 volúmenes si los volúmenes del mismo trabajo no pueden estar separados?

2. ¿De cuántas formas se pueden sentar 5 chicos y 5 chicas en una mesa redonda si dos chicos no pueden estar juntos?

3. Usando 7 consonantes y 5 vocales solamente, ¿cuántas palabras diferentes se pueden escribir utilizando 4 consonantes y 3 vocales sin repetir ninguna letra?

4. Probar que en Almería hay al menos dos personas con las mismas iniciales. (Se supone que las iniciales son la primera letra del nombre y los dos apellidos -tres letras-).

5. En una fiesta hay m chicos y n chicas. ¿De cuántas formas pueden formar k parejas de baile mixtas? ($k \leq min(n, m)$).

6. De una baraja que contiene 52 cartas se sacaron 10. ¿En cuántos casos entre las cartas sacadas habrá:

   (a) por lo menos un as,

   (b) exactamente un as,

   (c) no menos de dos ases,

   (d) exactamente dos ases.

7. En una partida de poker (baraja de 52 cartas y se reparten 5 a cada jugador), ¿de cuántas formas distintas se puede:

   (a) sacar 4 ases,

   (b) sacar 4 cartas del mismo palo,

   (c) sacar exactamente una pareja.

8. ¿De cuántas formas se pueden repartir 10 bolas diferentes en 3 urnas distintas? ¿Y 10 bolas iguales en 3 urnas distintas? (se supone que las urnas tienen un capacidad ilimitada).

9. ¿Cuánto suman todos los números de cinco cifras que se obtienen permutando los dígitos impares sin repetir ninguno?

10. ¿Cuántos subconjuntos tiene un conjunto finito de n elementos?

11. ¿Cuántas diagonales tiene un polígono de n lados?

12. En una asociación se va a constituir un órgano de dirección constituido por 20 personas y distribuido en tres comités, de tal forma que dos de los comités tengan 8 personas y el tercero 4. ¿De cuántas formas se puede constituir el órgano de dirección?

13. ¿Cuántos números hay de 5 cifras de tal forma que no se repita ninguna cifra, teniendo en cuenta que los ceros a la izquierda no cuentan como cifra? ¿Y si se pueden repetir las cifras?

14. En una partida de parchís gana el jugador que antes consiga “meter en casa” sus cuatro fichas del mismo color. Si participan cuatro jugadores y la partida continúa hasta que todos han completado el recorrido, ¿cuántos órdenes distintos hay para la entrada de las 16 fichas en casa?

Relación 4: Cálculo de probabilidades

1. Simplificar las siguientes expresiones:

   (a) $(A \cup B) \cap (A \cup B^c)$.
   (b) $(A \cap B) \cup (A - B)$.
   (c) $(A^c \cup B) \cap (A \cup B)^c$.

2. Dado que $P(A) = 3/4$ y $P(B) = 3/8$, demostrar que:

   (a) $P(A \cup B) \geq 3/4$.
   (b) $1/8 \leq P(A \cap B) \leq 3/8$.

   Construye unas desigualdades análogas para el caso de que $P(A) = 1/3$ y $P(B) = 1/4$.

3. Sea $P(A) = 1/3$, $P(B) = 1/4$ y $P(A \cap B) = 1/6$. Calcular las siguientes probabilidades: $P(A^c), P(A^c \cup B), P(A \cup B^c), P(A^c \cap B^c), P(A^c \cup B^c)$.

4. Para cualesquiera dos sucesos A y B demostrar que:

$$P(A \cap B) - P(A)P(B) = P(A^c)P(B) - P(A^c \cap B) \ .$$

5. Si P es una probabilidad, comprobar si son ciertas o falsas las siguientes afirmaciones, demostrándolas o poniendo un contraejemplo:

   (a) Si $P(A) + P(B) > 1$ entonces $A \cap B \neq \emptyset$.
   (b) Si $P(A) = P(B) = p$ entonces $P(A \cap B) \leq p^2$.
   (c) Si $P(A) = P(B^c)$ entonces $A^c = B$.
   (d) Si $P(A) = 0$ entonces $A = \emptyset$.
   (e) Si $P(A) = 0$ y $P(B) = 1$, entonces $P(A \cap B) = 0$.

6. Razónese si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

   (a) Si la suma de las probabilidades de dos sucesos es 1, ambos sucesos son complementarios.
   (b) La igualdad $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ únicamente es cierta si $A \cap B$ no es un suceso imposible.
   (c) Los sucesos A, B, y $A \cap B$ tienen las siguientes probabilidades: $P(A) = 0.25$, $P(B) = 0.5$ y $P(A \cap B) = 0.25$.

(d) Un suceso y su contrario pueden tener probabilidades cuyo producto sea 1.

7. Sea P una probabilidad, ¿son verdaderas o falsas cada una de las siguientes afirmaciones?: (Razona la respuesta detalladamente)

   (a) La $P(A/B)$ nunca puede ser mayor que $P(A)$.

   (b) Si $P(A/B) = P(A/C)$ entonces $P(B) = P(C)$.

   (c) Si A y B son sucesos independientes, entonces $P(A/B) = P(B)$.

   (d) Si A y B son independientes, entonces $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

8. Supongamos que extraemos k bolas de una urna que contiene n bolas numeradas del 1 al n, de tal forma que cada vez que sacamos una la volvemos a introducir en la urna (muestreo con reemplazamiento). ¿Qué probabilidad hay de que todas las bolas seleccionadas tengan números distintos?

9. Disponemos de una moneda equilibrada que lanzamos 10 veces. Se pide:

   (a) probabilidad de obtener exactamente 3 caras,

   (b) probabilidad de obtener a lo sumo 3 caras.

10. En una clase hay 15 chicos y 30 chicas. Se seleccionan al azar 10 estudiantes para una tarea especial. ¿Qué probabilidad hay de seleccionar exactamente 3 chicos?

11. Unas oposiciones constan de 20 temas. Se debe escoger un tema de tres elegidos al azar. Calcular la probabilidad de que un alumno que ha preparado 6 temas le toque al menos uno que sabe.

12. En una partida de cartas honrada se reparten 5 de forma aleatoria de una baraja de 52 cartas. Calcular la probabilidad de que en un jugador tenga:

    (a) un as, una sota, un caballo, un rey y un diez del mismo palo,

    (b) cuatro cartas del mismo valor (ases, doses,...).

13. Se seleccionan aleatoriamente 5 letras del abecedario (28 letras). Calcular la probabilidad de que la palabra formada

    (a) contenga solo una “a”,

    (b) solamente tenga vocales.

    Calcular dichas probabilidades en en caso de que la selección se haga con reemplazamiento y sin reemplazamiento.

14. Se extraen cartas de una baraja (52 cartas) sucesivamente hasta que aparece un as. ¿Cuál es la probabilidad de que el primer as aparezca en la n-ésima extracción?.

15. En una clase hay n estudiantes. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos dos estudiantes tengan el mismo cumpleaños? (Se supone que todos los años tienen 365 días).

16. Se escoge un número al azar del conjunto $\{0, 1, \ldots, 10^n - 1\}$. Calcular la probabilidad de que en el sistema decimal el número esté formado por k cifras.

Relación 5: Probabilidad condicionada

1. Si A y B son dos sucesos independientes, demostrar que tanto A y B^c como A^c y B también lo son.

2. ¿Puede ser un suceso independiente de sí mismo?, razonar la respuesta y en caso afirmativo poner un ejemplo.

3. Dados dos sucesos disjuntos A y B, demostrar que
$$P(A|A \cup B) = \frac{P(A)}{P(A) + P(B)} \ .$$

4. Sea P una probabilidad y $0 < P(B) < 1$. Demostrar que $P(A|B) = P(A|B^c) \iff A$ y B son independientes.

5. Dos máquinas A y B han producido respectivamente, 100 y 200 tornillos. Se sabe que A produce un 5% de piezas defectuosas y B un 6%. Se toma una pieza y se pide:
   (a) Probabilidad de que sea defectuosa.
   (b) Sabiendo que es defectuosa, probabilidad de que proceda de la máquina A.

6. Tenemos tres urnas con la siguiente composición:
   Urna A: 1 blanca, 2 negras y 3 rojas.
   Urna B: 2 blancas, 3 negras y 4 rojas.
   Urna C: 4 blancas, 7 negras y 5 rojas.
   Se elige una urna al azar y se toma una bola. Se pide:
   (a) Probabilidad de que sea roja.
   (b) Ha resultado ser blanca; probabilidad de que proceda de la urna C.

7. Tenemos dos urnas con la siguiente composición:
   Urna A: 5 bolas blancas y 3 negras.
   Urna B: 4 bolas blancas y 7 negras.
   Se saca una bola de la urna A y se introduce en la urna B. Calcular la probabilidad de que al extraer una bola de la urna B, ésta sea blanca.

8. Se dispone de dos urnas con la siguiente composición:
   Urna A: 8 bolas blancas y 5 negras.
   Urna B: 4 bolas blancas y 9 negras.
   La probabilidad de coger una bola de la urna A es el triple que la de cogerla de la urna B. Se hace una extracción y la bola sale negra. ¿Cuál es la probabilidad de que se haya sacado de la urna A?.

9. En cierta facultad el 25% de los estudiantes suspenden Matemáticas, el 15% Química y el 10% ambas. Se selecciona un estudiante al azar.

   (a) Si ha suspendido Química, ¿cuál es la probabilidad de que suspendiera Matemáticas?.

   (b) Si tiene la Química aprobada, ¿cuál es la probabilidad de que tenga también las Matemáticas aprobadas?.

10. La probabilidad de accidente de un avión en el mes de Diciembre cuando está nublado es de 0.3, mientras que cuando está despejado es de 0.01. Se sabe que en el mes de Diciembre hubo 20 días nublados y el avión tuvo un accidente. ¿Cuál es la probabilidad de que lo tuviera en un día nublado?.

11. Una urna se ha llenado tirando una moneda al aire dos veces y poniendo una bola blanca por cada cara obtenida y una bola negra por cada cruz. Se extrae una bola y resulta ser blanca. Hallar la probabilidad de que la otra también lo sea.

12. En un sistema de alarma, la probabilidad de que se produzca un peligro es 0.1. Si éste se produce, la probabilidad de que la alarma funcione es 0.95. La probabilidad de que funcione la alarma sin haber habido peligro es 0.03. Hallar:

   (a) Probabilidad de que habiendo funcionado la alarma, no haya habido peligro.

   (b) Probabilidad de que haya un peligro y la alarma no funcione.

   (c) Probabilidad de que no habiendo funcionado la alarma, haya un peligro.

13. Juan dice la verdad nueve veces de cada diez, Pedro siete veces de cada nueve. Se extrajo una bola al azar de una bolsa que contenía cinco bolas blancas y veinte negras. Ambos dijeron que la bola extraída era blanca. ¿Cuál es la probabilidad de la bola extraída fuera realmente blanca?

14. Se elige una carta al azar de una baraja española. Considérense los sucesos F:=sacar figura, R:=sacar rey, E:=sacar espadas y O:=sacar oros. Estudiar la independencia de los sucesos R y F, R y E, y E y O, si:

   (a) la baraja es normal,

   (b) la baraja ha perdido el as de espadas.

15. Tres aventureros deben elegir a uno de ellos para una misión arriesgada. Para ello toman una urna con dos bolas blancas y una negra y extraen cada uno sucesivamente una bola sin reemplazamiento. El elegido será el que escoja la bola negra. Demuéstrese que todos tienen la misma probabilidad de que les toque, sea cual sea el orden en que efectúen las extracciones.

16. Se consideran dos urnas U_1 y U_2. En la urna U_1 hay 5 bolas rojas y cuatro bolas verdes, mientras que U_2 está vacía. Se extraen cuatro bolas de U_1 y se introducen en U_2. De esta segunda urna, U_2, se extrae una bola y resulta ser verde. ¿Cuál es la probabilidad de sacar una bola roja en la segunda extracción?.

17. En una urna hay 12 bolas entre blancas y negras. Sabiendo que la probabilidad de elegir dos bolas blancas en dos extracciones sin reemplazamiento es de $1/11$, ¿cuántas bolas negras hay en la urna?

18. Se tiene una urna cuya composición es 7 bolas blancas y 9 bolas negras. Se saca una bola. Si es blanca se devuelve a la urna y si es negra se introduce 1 bola blanca y 2 negras en la urna. Se saca una segunda bola. Calcular la probabilidad de que:

    (a) las dos bolas extraídas sean negras,

    (b) la primera bola sea negra si la segunda ha sido negra.

19. Se dispone de dos urnas. En la primera hay 1 bola blanca y 9 bolas negras y en la segunda 1 bola negra y 5 bolas blancas. De cada urna se extrae una bola y el resto se introducen en una tercera urna. ¿Cuál es la probabilidad de que al extraer una bola de esta tercera urna sea blanca?.

20. A un puesto aduanero llegan periódicamente misiones diplomáticas procedentes de un determinado país formadas por 10 individuos. El citado país es un gran productor de marihuana, circunstancia que aprovechan las misiones diplomáticas para pasar algún que otro "cargamento", siendo su forma habitual de hacerlo el que dos de los diez miembros llevan en sus maletas el "producto".

    Los aduaneros tienen ya información del truco, pero, para no producir incidentes diplomáticos, se limitan a inspeccionar el equipaje de tres personas de la delegación diplomática. Su experiencia les dice además que el 10% de las misiones portan droga.

    Si una misión inspeccionada no arroja resultado positivo, ¿cuál es la probabilidad de que realmente no lleven droga ninguna?

21. En una galería de arte hay 12 cuadros, de los que 10 son originales. Un coleccionista, enormemente rico, pero con poca idea de pintura quiere comprar un cuadro que elige al azar. Antes de comprarlo, le pregunta a su asesor si el cuadro es original o no. Dicho asesor acierta 9 de cada 10 veces.

    (a) Si el asesor dice que el cuadro es bueno, ¿qué probabilidad hay de que realmente lo sea?.

    (b) Si el asesor decide que el cuadro es una copia, el coleccionista elige otro, ¿qué probabilidad hay de que el segundo cuadro sea original?.

22. Conocida es la generosidad culinaria con la que San Sebastián recibe a sus visitantes. Se sabe que el 40% de los visitantes sucumben a esta tentación y comen más de la cuenta. La probabilidad de sufrir una indigestión si se ha comido más de la cuenta es 0.6, mientras que esta probabilidad baja a 0.1 si no se ha comido más de la cuenta. Un visitante ingresa en un centro hospitalario con una indigestión, ¿cuál es la probabilidad de que haya comido más de la cuenta?.

23. Una cierta enfermedad está presente en 1 de cada 100 personas en una población dada. Se dispone de un test que da positivo para una persona que no tiene la enfermedad con probabilidad 0.05. Se sabe además que si el test da negativo, la probabilidad de que la persona a la que se aplica no esté enferma es de 0.99. ¿Cuál es la probabilidad de que una persona cuyo test da positivo tenga realmente la enfermedad?

24. El 60% de los tornillos producidos por una fábrica proceden de una máquina A, mientras que el 40% restante proceden de otra máquina B. Los tornillos pueden considerarse defectuosos bien por su longitud, por su diámetro o por ambos motivos. La máquina A produce un 2% de tornillos defectuosos por su longitud, un 4% por su diámetro y un 1.5% por ambos defectos. La máquina B, un 4%, 6% y 3% respectivamente. Determinar:

    (a) Si elegimos un tornillo al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea defectuoso?.

    (b) Si un tornillo es defectuoso por su longitud, ¿cuál es la probabilidad de que lo haya producido la máquina B?.

25. Una noche de feria, el 40% de los miembros de una pandilla consumieron bebida de tipo A, mientras que el 60% restante consumieron bebida de tipo B. Se sabe que si una bebida es de tipo B, la probabilidad de que esté en mal estado ("garrafón") es de 0.1, y que 2/3 de los garrafones detectados entre la pandilla se correspondían con bebidas de tipo A. Si uno de los individuos de la pandilla consumió bebida de tipo A, ¿cuál es la probabilidad de que fuera de garrafón?

26. Supongamos que una caja contiene cinco monedas, y que para cada una de ellas, la probabilidad de obtener cara en un lanzamiento es diferente. Sea p_i la probabilidad de obtener cara en un lanzamiento de la i-ésima moneda ($i = 1, \ldots, 5$) y supongamos que $p_1 = 0$, $p_2 = 1/4$, $p_3 = 1/2$, $p_4 = 3/4$ y $p_5 = 1$.

    (a) Supongamos que se selecciona una moneda al azar y que al lanzarla una vez se obtiene una cara. ¿Cuál es la probabilidad de que la moneda seleccionada fuera la i-ésima?

    (b) Si se lanza de nuevo la misma moneda, ¿cuál sería la probabilidad de obtener otra cara?

(c) Si se hubiera obtenido una cruz en el primer lanzamiento de la moneda y ésta se volviera a lanzar, ¿cuál sería la probabilidad de obtener una cara en el segundo lanzamiento?

Relación 6: Variables aleatorias unidimensionales

1. La siguiente tabla muestra la función de masa de probabilidad de la variable aleatoria X:= número de personas por día que solicitan un tratamiento innecesario en el servicio de urgencia de un pequeño hospital.

x	0	1	2	3	4	5
$P(X = x)$	0.01	0.1	0.3	0.4	0.1	a

   (a) Encontrar $P(X = 5)$, $P(X \leq 2)$, $P(X < 2)$ y $P(X > 3)$.

   (b) Calcular $E(X)$ y $Var(X)$.

2. Determinar el valor de k para que cada una de las siguientes funciones sea una función de densidad:

   (a) $f(x) = k\left(1 + \frac{x^2}{5}\right)^{-1} \quad \forall x \in I\!R$.

   (b) $f(x) = k(1 + |x|) \quad \forall x \in (-1, 1)$.

   (c) $f(x) = ke^x(1 + e^x)^2 \quad \forall x > 0$.

3. Sea una variable aleatoria cuya función de densidad es:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ a(1+x) & 0 < x \leq 1 \\ 2/3 & 1 < x \leq 2 \\ 0 & x > 2 \ . \end{cases}$$

   (a) Obtener el valor de a para que f sea una función de densidad.

   (b) Calcular $P\{0.5 < X \leq 1.5\}$.

4. Sea X una variable aleatoria con función de densidad $f(x) = kx + \frac{1}{2}$, para cualquier x del intervalo $[-1, 1]$, y cero en el resto.

   (a) Determinar los valores de k para los cuales $f(x)$ es función de densidad.

   (b) Calcular la esperanza, la moda y la mediana de X.

   (c) ¿Para qué valores de k se minimiza Var(X)?.

5. Sea X una variable aleatoria continua con función de densidad f y función de distribución F. Expresar las funciones de densidad y de distribución de la transformación $Y = X^2$ en función de las de la variable original.

6. Utilizando el resultado anterior, calcular la función de densidad de la variable $Y = X^2$ cuando X sigue una distribución Normal.

7. Dada una variable aleatoria no negativa X, con función de densidad f, se define su *riesgo* como la función
$$r(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)} \quad \forall t > 0 \ ,$$
siendo F la función de distribución de X. Se pide:

   (a) Determinar la función de distribución a partir de la función de riesgo.

   (b) Caracterizar las variables con riesgo constante.

   (c) Calcular el riesgo de una variable con distribución
$$F(x) = 1 - e^{at} \quad \forall t \geq 0 \quad a > 0 \ .$$

8. Sea X una variable aleatoria con función de densidad
$$f(x) = \frac{1}{\pi(1 + x^2)} \quad \forall x \in I\!R \ .$$
Calcular la función de distribución y la función de densidad de la variable $Y = 5X + 2$.

9. La función de densidad de una variable aleatoria X es:
$$f(x) = ax^2 e^{-kx} \quad k > 0, \quad x \geq 0 \ .$$
Calcular:

   (a) El coeficiente a.

   (b) La función de distribución de la variable X.

   (c) La probabilidad de que X pertenezca al intervalo $(0, 1/k)$.

10. Supóngase que se selecciona al azar una palabra de la frase *MI CARRO ME LO ROBARON ANOCHE CUANDO DORMÍA*. Si X es el número de letras de la palabra seleccionada, calcular $\mathrm{E}(X)$ y $\mathrm{Var}(X)$.

11. Calcular la moda de una distribución binomial $B(n, p)$. (Sugerencia: estudiar el cociente $P\{X = x + 1\}/P\{X = x\}$).

12. Una variable aleatoria X toma los valores 1 con probabilidad p y a con probabilidad $1 - p$. ¿Cuál debe ser el valor de a si se sabe que $\mathrm{E}(X)$=12 y $\mathrm{Var}(X)$=0.36?.

13. En una lotería se venden 30.000 boletos a veinte duros cada uno. El primer premio es de 1.000.000 de pesetas, el segundo de 500.000 y el tercero de 100.000. ¿Cuál es la ganancia esperada de un individuo que ha comprado una papeleta?.

14. Sea una variable aleatoria X que se distribuye según una $B(n,p)$. Calcular el valor de p que hace máxima su varianza.

15. Sea X una variable de la que conocemos que E(X)=0 y Var(X)=4. ¿Puede ser que $P\{X=5\}=\frac{1}{2}$?.

16. De los 4000 votantes que participaron en unas elecciones, solamente 90 votaron por el candidato A. Si se selecciona una muestra de tamaño 50, ¿cuál es la probabilidad de que a los sumo 2 hayan votado al candidato A?.

17. Supóngase que un examen contiene 15 preguntas del tipo verdadero o falso. El examen se aprueba contestando correctamente al menos a 11 preguntas. Un estudiante se presenta al examen después de una semana de juerga y, por lo tanto, sin haber estudiado nada, y decide contestar lanzando una moneda para decidir la respuesta cierta. ¿Qué probabilidad tiene el alumno juerguista de aprobar el examen?.

18. Sea X una variable aleatoria con función de probabilidad:

$$P(X=x)=\frac{e^{-1}}{(x+1)!} \quad x=-1,0,1,\cdots$$

    Se pide:

    (a) Encontrar su media y su varianza.

    (b) Encontrar su función generatriz de momentos.

19. Una variable aleatoria X tiene como campo de variación los enteros positivos, y en ellos la probabilidad es proporcional a la probabilidad asignada por una variable de Poisson de parámetro λ. Calcular la esperanza y la función de masa de probabilidad.

20. Dada la variable aleatoria X, cuya distribución de probabilidad viene definida por la función de distribución:

$$F(x)=\begin{cases} 1-\frac{a^2}{x^2} & a<x \\ 0 & a\geq x \end{cases},$$

    donde a es un constante positiva, determinar la esperanza y comprobar que la distribución carece de varianza.

    En el caso particular de que $a=10$, calcular $P\{X<15\}$, $P\{X>18\}$ y $P\{X<18|X>15\}$.

21. Sea X una variable aleatoria cuya función de masa de probabilidad es:

$$P\{X = x\} = \begin{cases} kx & x = 1, 2, \ldots, n \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases} .$$

   (a) Calcula el valor de k y la función de distribución de X.

   (b) ¿Cuál es la probabilidad de que X tome un valor par?.

22. Un número se elige aleatoriamente en el intervalo (0,1). Calcular la probabilidad de que:

   (a) El primer dígito decimal sea un 1,

   (b) El segundo dígito decimal sea un 5,

   (c) El primer dígito decimal de su raíz cuadrada sea un 3.

23. La función de densidad de una variable aleatoria continua X es:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + b & x \in (0, 2) \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases} .$$

   Determinar a y b sabiendo que $P\{1/2 < X \leq 1\} = 0.1357$.

24. Sea X una variable aleatoria con:

$$\mathrm{E}(X^n) = \frac{1}{n+1} .$$

   Calcular la función generatriz de momentos de la variable aleatoria X.

25. Se sabe que la variable aleatoria X toma valores en los enteros positivos de tal forma que cumple la relación $P(X = k) = \alpha P(X = k - 1)$, con $0 < \alpha < 1$ prefijado. Calcular la función de masa de probabilidad de X.

26. El tiempo de vida (en horas) de las bombillas procedentes de cierta fábrica sigue una distribución normal de media μ y desviación típica σ. Se sabe que el 15.87% de las bombillas producidas en dicha fábrica tienen un tiempo de vida de más de 200 horas, y 30.85%, de más de 190 horas.

   (a) Calcular μ y σ.

   (b) Se eligen al azar 4 bombillas procedentes de la fábrica en cuestión. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos una de ellas tenga un tiempo de vida superior a 180 horas?.

27. Sea X una variable aleatoria cuya función masa de probabilidad viene dada por $p(x) = k/x$, $x = 1, 2, 3, 4$. Calcular el valor de k y la función de distribución de X.

28. El tiempo de demora en el servicio a domicilio de los repartidores de pizza de una determinada marca sigue una distribución normal de media 25 minutos y desviación típica 5 minutos. La empresa, en su publicidad, asegura que si el repartidor tarda más de media hora en llevar el pedido, solo te cobran la mitad. Si en una tarde los repartidores hacen 20 salidas, ¿cuál es la probabilidad de que en al menos en dos ocasiones lleguen tarde?

29. La duración de un satélite es una variable aleatoria distribuida exponencialmente con un tiempo de duración esperado de 1.5 años. Si tres satélites se lanzan simultáneamente, ¿cuál es la probabilidad de que al menos dos estén aún en órbita después de dos años?

30. La altura de los estudiantes de cierta universidad sigue una distribución normal con media $\mu = 167$ cm y desviación típica $\sigma = 3$ cm.

    (a) Calcular el porcentaje de estudiantes que tienen altura (i) mayor que 167 cm, (ii) mayor que 170 cm, (iii) entre 161 y 173 cm.

    (b) Si se seleccionan al azar cuatro estudiantes, calcular:

        i. La probabilidad de que todos tengan una altura superior a 170 cm.

        ii. La probabilidad de que exactamente dos de ellos tengan una altura inferior a la media.

31. Las ventas diarias de material informático de cierta tienda se distribuyen según una normal. Se sabe que el 20% de ellas son superiores a 1000 euros y que el 30% sobrepasan los 800 euros.

    (a) Si los costes (C) están relacionados con las ventas (X) según la expresión

    $$C = 350 + X - 0,00015X^2 \ ,$$

    hállese el coste medio.

    (b) El dueño de la cadena a la que pertenece la tienda en cuestión decide otorgar un premio a todas aquellas tiendas que, entre 5 días elegidos al azar, al menos 4 hayan superado los 475 euros en ventas de material informático. ¿Cuál es la probabilidad de que esta tienda reciba el premio?.

32. Una empresa recibe circuitos integrados de tres fábricas distintas. Se sabe que el 40% proceden de la fábrica A, el 40% de B y el 20% de C. Se ha comprobado que el 2% de los circuitos procedentes de A son defectuosos, y que el 2% de C también lo son.

(a) Si el 50% de los circuitos defectuosos proceden de B, ¿cuál es la probabilidad de que un chip elegido al azar entre los procedentes de B sea defectuoso?

(b) Si tomamos 10 circuitos al azar, hallar la probabilidad de que el 10^{o} elegido sea el 4^{o} no defectuoso.

33. Una máquina fabrica tornillos, y los desajustes en la misma hacen que los tornillos tengan distintos tamaños. Se ha estimado que los errores en su longitud, en cm., siguen una distribución cuya función de densidad es

$$f(x) = ke^{-|x|}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Son rechazados todos los tornillos que tengan un error en su longitud superior, en valor absoluto, a 0.4 cm.

(a) Calcular la función de distribución.

(b) Si se elije un tornillo al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea aceptado?

(c) Si un tornillo ha sido aceptado, ¿cuál es la probabilidad de que el error de su longitud sea de al menos 0.2 cm.?

34. El peso de las sandías que se exportan desde una determinada cooperativa se supone que se distribuye normalmente. En una partida se han exportado 8.000 piezas, de las que 1.600 pesaron menos de 1.75 kilos, y 2.000 más de 3 kilos.

(a) Determinar la media y la desviación típica de dicha distribución.

(b) Se toma una caja de 10 sandías. Hallar la probabilidad de que al menos una pese más de 2.75 kilos.

Relación 7: Variables aleatorias bidimensionales

1. La función de densidad de una variable aleatoria bidimensional (X, Y) es:

$$f(x, y) = \frac{x + y}{27} \quad 0 \leq x \leq 3, \quad 0 \leq y \leq 3 \ .$$

Se pide:

   (a) Establecer si las variables son o no independientes.
   (b) Media y varianza de cada componente.
   (c) Sabiendo que $X > 2$ calcular la probabilidad de que $Y \leq 2$

2. Una variable aleatoria bidimensional (X, Y) se distribuye uniformemente en el cuadrado unidad $(0 \leq x \leq 1 \ , \ 0 \leq y \leq 1)$. Construir la función de distribución conjunta y calcular las marginales. ¿Son X e Y independientes?.

3. Supongamos que X e Y son dos variables aleatorias independientes con función de densidad: $f(x) = \theta e^{-\theta x}, \ x > 0$ .Demostrar que $X + Y$ y X/Y son independientes.

4. Si (X, Y) se distribuye uniformemente en el triángulo $x \geq 0, \ y \geq 0, \ x + y \leq 2$, encontrar:

   (a) la función de densidad conjunta de (X, Y),
   (b) la función de densidad de X,
   (c) la función de densidad de Y condicionada a que $X = x$,
   (d) $\mathrm{E}(Y|X = x)$.

5. Consideremos tres lanzamientos de una moneda. Se definen las siguientes variables aleatorias:

   X:="Número de caras en los tres lanzamientos".

   Y:="Número de cruces antes de la primera cara".

   Se pide:

   (a) Función de masa de probabilidad conjunta.
   (b) Funciones de masa de probabilidad marginales.
   (c) Función de distribución condicionada de X dada $Y = 0$.

6. Dada la variable aleatoria bidimensional (X, Y) con función de densidad conjunta:

   $f(x, y) = 2, \ 0 \leq x \leq 1, \ 0 \leq y \leq 1, \ 0 \leq x + y \leq 1,$

   se pide:

(a) Funciones de densidad marginales.

(b) $P\left(\frac{1}{2} \leq Y \leq \frac{7}{8} / X = \frac{1}{3}\right)$.

7. Un industrial se dedica a la venta de un artículo en dos ciudades A y B. La demanda X, en kilos de la ciudad A se distribuye uniformemente en el intervalo $(1000, 3000)$, y la demanda Y en kilos de la ciudad B se distribuye según la función de densidad

$$f(y) = \frac{2}{3} 10^{-6} y, \quad 1000 \leq y \leq 2000 \ .$$

Si las demandas son independientes, y en caso de necesidad la tienda de una cualquiera de la ciudades puede aprovisionarse de forma casi inmediata del almacén de la otra, se pide:

(a) La demanda media total.

(b) La cantidad a almacenar entre las dos ciudades para tener una probabilidad 0.8 de atender a la demanda total.

(c) La probabilidad de que la demanda total supere los 3000 kilos

8. Si X e Y son dos variables aleatorias independientes tales que $X \sim N(\mu_1, \sigma_1)$ e $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2)$. Calcular la función de densidad de la variable aleatoria $Z = X + Y$.

9. Sean X e Y dos variables de Poisson independientes de parámetros λ_1 y λ_2.Demostrar que:

(a) La suma $X + Y$ sigue una distribución de Poisson.

(b) La distribución condicionada de X dado que se conoce $X + Y$ es una binomial.

10. Demostrar que para cualesquiera dos variables aleatorias X e Y con varianzas finitas ocurre:

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}[\mathrm{Var}(X|Y)] + \mathrm{Var}[\mathrm{E}(X|Y)]$$

11. Sea la variable aleatoria bidimensional (X, Y), cuya densidad conjunta viene dada por $f(x, y) = ke^x(y + 1)$ en el recinto $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 2$ y cero en el resto.

(a) Hallar la función generatriz de momentos.

Relación 8: Teorema Central del Límite

1. La calificación esperada en un examen es de 6 puntos con una desviación típica de 1.1.

   (a) Si un grupo de 4 amigos van a presentarse al examen, obtener una cota de la probabilidad de que su nota media sea aprobado.

   (b) Si se presentan 60 alumnos al examen, ¿cuál es la probabilidad de que su calificación media supere los 6.2 puntos?

   (c) Según la experiencia, sólo el 2% de los alumnos que se presentan obtienen matrícula de honor. ¿cuál es la probabilidad de que entre los 60 presentados haya más de dos alumnos con esa puntuación?

2. Debido al frecuente fallo de un componente electrónico, se ha hecho un estudio y se ha determinado que en un lote de 10 componentes, el 45% de éstos son defectuosos. Si se selencionan 50 lotes, ¿cuál es la probabilidad de que en total haya menos de 200 componentes en buen estado?

3. Una compañía de seguros ha determinado que 2 de cada 10.000 personas fallecen anualmente en accidente de tráfico. Si la compañía tiene contratados 40.000 seguros de vida según los cuales debe abonar a la familia del fallecido un total de dos millones de pesetas,

   (a) ¿Cuál es la probabilidad de que la compañía tenga que abonar en un año al menos 12 millones de ptas?

   (b) Si tuviese 100.000 asegurados, ¿cuál es la probabilidad de que en un año fallezcan más de 20? ¿Cuánto dinero debe tener la compañía para tener una probabilidad como mínimo de 0.95 de poder indemnizar a todas las familias de los asegurados fallecidos en un año?

4. Una marca de automóviles compra rodamientos a una determinada empresa. En el contrato se especifica que serán rechazados aquellos rodamientos cuyo diámetro difiera del diámetro medio en más de 1 mm. Por otro lado, la empresa sabe que el diámetro medio de sus rodamientos es 8 mm y la desviación típica es de 0.3 mm. ¿Cuál es la probabilidad de rechazar un rodamiento?. Si el diámetro de los rodamientos tuviese una distribución normal ¿cuánto valdría esa probabilidad?

5. La distribución del número de erratas que se pueden encontrar en una página de un libro aparece en la siguiente tabla:

Nº de erratas	0	1	2	3
Probabilidad	0.14	0.34	0.29	0.23

   Calcular la probabilidad de que un texto de 100 páginas contenga al menos 200 erratas.

6. Se lanza 500 veces una moneda. Calcular la probabilidad de obtener entre 240 y 260 caras.

7. Un individuo posee tres monedas idénticas externamente, pero en las que las probabilidades de obtener cara son diferentes e iguales a 0.8, 0.6 y 0.4. Las tres monedas se lanzan simultáneamente 100 veces. ¿Cuál es la probabilidad de obtener más de 175 caras en los 100 lanzamientos?

8. Una compañía aérea tiene aviones con una capacidad de 340 plazas. La experiencia muestra que un 8% de los clientes que han adquirido billete no se presentan en el momento de embarque. ¿Cuántas plazas pueden venderse de cada aparato, si se quiere que la probabilidad de no poder acomodar a todos los pasajeros sea menor que 0.01?

9. Los ingresos diarios de un restaurante, en miles de pesetas, oscilan entre 530 y 570, con distribución uniforme. Calcular la probabilidad de que en 100 días los ingresos totales superen la cifra de 55.25 millones de ptas. suponiendo independencia en los ingresos diarios.

10. Un individuo acude a un casino dispuesto a jugar a la ruleta apostando par o impar. La probabilidad de ganar en una jugada de este tipo es 18/37. El individuo apuesta una ficha cada vez. Alplicando el Teorema Central del Límite determina cuántas fichas debe jugar para obtener algún beneficio o quedarse como estaba, con una probabilidad del 40%?

11. El número medio de puntos por minuto que anota un jugador de baloncesto en los partidos es 1, con una distribución de Poisson. Se pide:

    (a) ¿Cuál es el número medio de puntos que anota por partido?

    (b) ¿Cuál es la probabilidad de que en 1 minuto anote 4 puntos?

    (c) Si una liga consta de 20 partidos, ¿cuál es la probabilidad de que en ella anote entre 700 y 900 puntos?

12. Un examen consta de 100 preguntas tipo test con 5 respuestas alternativas cada una (sólo una de las 5 respuestas es cierta). La puntuación del test se realiza de la siguiente forma: por cada pregunta contestada correctamente suma un punto y por cada pregunta contestada mal resta 0.25 puntos. Si la puntuación obtenida en el test es positiva entonces la calificación en la asignatura es la puntuación del test dividida entre 10, sin embargo si la puntuación es negativa la calificación es 0. Determinar la probabilidad de que un alumno que responde al azar cada pregunta del test, obtenga 0 como calificación de la asignatura.

13. Se ha diseñado un robot que juega al baloncesto, y del que se sabe que en tiros libres, la probabilidad de que enceste es el doble que la probabilidad de que falle. Para poner

a prueba al robot, proponemos un juego en el que un acierto en un tiro libre vale dos puntos, mientras que un fallo resta un punto. Si dejamos lanzar mil veces al robot, ¿Cuál es la probabilidad de que obtenga más de 800 puntos?

14. Se ha detectado un error en cierto modelo de procesador. En el 99% de las ocasiones, dicho error no es percibido por el usuario. Si se han vendido 1000 unidades de dicho procesador, ¿cuál es la probabilidad de que menos de 250 usuarios perciban el error?

Relación 9: Estimación Puntual. Propiedades.

1. La distribución del peso de las manzanas de una cosecha sigue una distribución normal, cuyo peso medio es desconocido y su desviación típica 7 gramos. Para una m.a.s. de tamaño 5 se consideran los siguientes estimadores del peso medio

$$\hat{\mu}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{5} X_i}{5} \quad y \quad \hat{\mu}_2 = X_1 + 2X_2 + 3X_3 - 4X_4 - X_5$$

   Analizar cuál de ellos es mejor respecto a sesgo y varianza.

   Obtener los pesos medios estimados a partir de la muestra: 125, 135, 130, 137, 142.

2. Sea una v.a. con función de densidad

$$f(x) = \theta e^{-\theta x} \qquad x > 0, \theta > 0$$

   se considera como estimador, en muestras aleatorias simples de tamaño 2, la función muestral

$$\hat{\theta} = \frac{X_1 + 3X_2}{4}$$

   Comprueba que $\hat{\theta}$ no es un estimador insesgado de θ y calcula su sesgo.

3. Sea X una v.a. con f. de densidad

$$f(x) = \frac{x}{\theta^2} e^{-x/\theta} \qquad x > 0$$

   Se considera como estimador de θ la función $\hat{\theta} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{2n}$, en m.a.s. de tamaño n. ¿Es consistente o suficiente este estimador?

4. El número de errores por página que comete una mecanógrafa sigue una distribución de Poisson con media λ desconocida. Para una muestra aleatoria simple de n páginas se pide analizar la insesgadez, eficiencia y consistencia del estimador media muestral. Obtener la estimación de λ para una muestra de 8 páginas con resultados: 4, 3, 2, 6, 4, 3, 5 y 5 fallos.

5. Supongamos que los ingresos de una población es una v.a. con media α desconocida y varianza σ^2 también desconocida. Si queremos estimar el ingreso medio de la población mediante una muestra aleatoria simple de tamaño n, respecto de la insesgadez y varianza, ¿cuál de los dos siguientes estimadores elegiríamos?

$$\hat{\alpha}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n-1} \qquad \hat{\alpha}_2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$$

6. Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una m.a.s. de una población $N(0, \sigma)$. Consideramos el estimador de σ^2: $T = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$. Comprobar si es insesgado o suficiente.

7. Comprueba que $\prod_{i=1}^{n} X_i$ es un estadístico suficiente para el parámetro θ de la siguiente función de densidad
$$f(x;\theta) = \theta x^{\theta-1} \qquad 0 < x < 1 \ .$$

Relación 10: Métodos de Estimación Puntual

1. La duración (en horas) sin fallos de un tipo de diodos sigue una distribución con función de densidad:
$$f(x) = \frac{1}{\theta}e^{-x/\theta} \qquad x > 0, \theta > 0 \ .$$
Si cogemos una muestra aleatoria simple de n diodos, calcular el estimador de máxima verosimilitud de θ. Analizar la insesgadez, consistencia y eficiencia del estimador obtenido.

   Si en una muestra aleatoria simple de 10 diodos las duraciones en horas fueron de 3520,3500, 3750, 3640, 3670, 3580, 3690, 3700, 3710, 3685; obtener una estimación máximo verosímil de la duración media sin fallos.

2. Supongamos que el precio de los productos vendidos en una tienda, en decenas de miles de pesetas, es una v.a. con función de densidad $f(x) = \theta x^{\theta-1}$, $0 < x < 1$ y $\theta > 0$. Se pide:

   (a) Comprobar que el estimador de θ obtenido por el método de los momentos no coincide con el de máxima verosimilitud.

   (b) Si en una m.a.s. de 5 artículos vendidos los precios en pesetas fueron: 1000, 7000, 5000, 8500 y 9000; obtener la estimación máximo verosimil del parámetro.

3. Sea una población definida por la siguiente función de masa de probabilidad:

x	-1	0	1
$P(X = x)$	$\frac{1-\theta}{2}$	$\frac{\theta+\lambda}{2}$	$\frac{1-\lambda}{2}$

   $0 < \theta < 1$ y $0 < \lambda < 1$. Estimar los parámetros θ y λ por el método de los momentos, ¿son insesgados los estimadores obtenidos?

4. Sea X una v.a. con función de densidad
$$f(x) = \frac{x}{\theta^2}e^{-x/\theta}, \qquad x \geq 0, \theta \geq 0$$
estudiar la eficiencia del estimador máximo verosimil del parámetro θ en muestras de tamaño n.

5. La función de distribución del tiempo de vida, en horas, de un determinado tipo de fusibles es:
$$F(x) = 1 - \left(1 + \frac{2x}{\theta}\right) e^{-2x/\theta}$$
Determinar una estimación puntual de θ a partir del tiempo en horas que han tardado en fundirse 5 fusibles que hemos observado:
$$650, 573, 960, 345, 756$$

6. Dada la v.a. X de la que conocemos:

$$P(X > x) = exp\left(-\frac{x^{3/2}}{\theta}\right), \quad x > 0, \quad \theta > 0$$

Se toma una m.a. de tamaño n. Determinar el estimador de máxima verosimilitud de θ.

7. Dada la v.a. X de la que conocemos:

$$f(x) = \frac{\theta}{1-\theta} x^{\frac{2\theta-1}{1-\theta}} \quad 0 < x \leq 1, \quad 1/2 < \theta < 1$$

Se toma una m.a. de tamaño n. Determinar el estimador de máxima verosimilitud de θ.

8. Dada la siguiente función masa de probabilidad,

$$p(x;\theta) = \theta^x (1-\theta)^{1-x}, \quad x = 0, 1, \quad 0 < \theta < 1 \ ,$$

obtén un estimador para el parámetro θ a partir de muestras de tamaño n mediante:

(a) el método de máxima verosimilitud,

(b) el método de los momentos.

En ambos casos, comprueba si el estimador obtenido es insesgado.

9. Se desea averiguar cuál es la probabilidad de obtener cara en un lanzamiento de una moneda trucada. Para ello, se ha lanzado lamoneda 10 veces obteniendo los siguientes resultados:

Lanzamiento	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Resultado	c	c	c	c	x	c	x	c	c	c

Estimar, mediante el método de los momentos, la probabilidad de sacar cara con esa moneda.

Relación 11: Estimación por intervalos

1. El diámetro en milímetros de los rodamientos producidos por una fábrica sigue una distribución $\mathcal{N}(\mu, 1)$. Al examinar una m.a.s. se obtuvieron las siguientes medidas: 7, 7.3, 8.2, 6.8, 6.3 y 7.7. Obtener a partir de la muestra la estimación máximo verosímil del parámetro μ y construir un intervalo de confianza del 99% para el citado parámetro.

2. Supongamos que el gasto diario en llamadas telefónicas de los dos departamentos de una empresa, en pesetas, sigue una distribución normal, con un gasto medio desconocido para ambos departamentos. Las desviaciones típicas son de 100 ptas. para el primer departamento y de 110 para el segundo. La dirección de la empresa ha observado que en una m.a.s. de 20 días, el gasto diario medio en llamadas telefónicas del primer departamento fue de 1100 ptas y de 1400 para el segundo departamento. Obtener un intervalo de confianza del 90 % para la diferencia de gastos medios.

3. La cantidad X, de dinero en la caja de una sucursal bancaria, en millones de ptas, al final de una jornada laboral, es una v.a. con distribución normal. Se toma una m.a.s. de 9 días y observando la v.a. se obtienen los siguientes resultados: 15, 20, 22, 19, 17, 25, 21, 18 y 23 millones de ptas.

   (a) Obtener el intervalo de confianza del 95% de la cantidad media de dinero existente en caja.

   (b) Obtener el intervalo de confianza del 95% de la varianza de la distribución.

4. Una empresa tiene dos delegaciones: A y B. La distribución mensual de los ingresos en millones de ptas sigue una distribución normal. Se han tomado m.a.s. de los ingresos de las dos delegaciones obteniendo para la A: 10, 7, 8, 6 y 4 millones, y para la B: 10, 5, 2, 3, 7, 3, 4 y 6 millones. Calcular un intervalo de confianza 95% para el cociente de varianzas.

5. El consumo anual de electricidad (en Kwh) en los hogares de una población es una v.a. X cuya distribución se desconoce. A partir de una m.a.s. de 23 hogares se ha obtenido que $\overline{X} = 1800$ y $S = 480$. Obtener un intervalo de confianza al 95% para la media de X. Si mediante estudios previos se sabe que el consumo de electricidad se distribuye normalmente, ¿cómo se vería afectado el intervalo anterior?.

   Obtener la nueva expresión del intervalo si la población es normal con desviación típica conocida $\sigma = 475$.

6. Se ha hecho un estudio de las calificaciones obtenidas en una asignatura que se imparte en dos carreras: A y B. Una m.a.s. de 10 alumnos que estudian la carrera A obtuvieron las siguientes notas: 2, 6, 4, 3, 7, 5, 4, 6, 1 y 2. Las calificaciones de los 13 alumnos seleccionados de la carrera B, fueron: 1, 8, 8, 4, 6, 2, 0, 7, 7, 1, 7, 0 y 1.

(a) Obtener los intervalos de confianza del 95% para las varianzas de las calificaciones en cada una de las dos carreras.

(b) Obtener el intervalo de confianza del 95% para el cociente de varianzas de las calificaciones de ambas carreras.

7. De una población con función de densidad:

$$f(x) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}}, \quad x \geq 0, \quad \theta > 0$$

se ha tomado una muestra de tamaño 100 y se ha calculado su media, siendo ésta 128. Obténgase un intervalo de confianza al 97% para el parámetro θ.

8. En una m.a.s. de 2000 habitantes 550 son partidarios de la aprobación de una determinada ley. Dar una estimación de la proporción de habitantes a favor de esa ley y un intervalo de confianza del 95%.

9. Una cadena de supermercados afirma que su campaña publicitaria le hará aumentar el volumen medio de ventas anuales. Para verificar esta hipótesis elige 12 supermercados de su cadena y estudia las ventas anuales (en millones de pesetas) en cada uno de ellos, durante el año anterior y el posterior a la campaña publicitaria, obteniendo los siguientes resultados

Antes	10	12	15	8	19	14	12	21	16	11	8	15
Después	11	11	17	9	21	13	16	25	20	18	10	17

Suponiendo que las ventas se distribuyen normalmente, estudiar mediante intervalos de confianza si puede considerarse efectiva la campaña publicitaria.

10. Un agente de seguros visita diariamente a 5 familias para hacerles un seguro de vida. En la siguiente tabla aparecen los resultados sobre el número de seguros que hace diariamente durante 100 días elegidos al azar:

N^0 de seguros	0	1	2	3	4	5
N^0 de días	10	25	30	25	6	4

Suponiendo que el número de seguros que hace diariamente sigue una distribución binomial, $B(5, p)$. Obtener la estimación máximo verosímil del parámetro p y un intervalo de confianza 90%.

11. Se sabe que los tiempos de vida (en años) de determinados componenetes electrónicos, X e Y, siguen una distribución normal con medias desconocidas y varianzas de 0.5 y 1 años^2 respectivamente. Para comparar experimentalmente la duración de ambos dispositivos se han tomado las siguientes muestras:

X	10	13	9.5	8.75	11	9.75
Y	11	10	10.1	12	11.5	

Obtén un intervalo de confianza a nivel 0.95 para la diferencia de las medias.

12. Se sabe que el tiempo (en milisegundos) que tarda la cabeza lectora de un disco duro en situarse sobre la pista adecuada sigue una distribución normal. Para un determinado disco duro se ha tomado una muestra de 10 tiempos de acceso, obteniendo los siguientes tiempos (en ms): 9, 12, 7, 8, 10, 11, 9, 8, 9, 10. Obtener un intervalo de confianza al 95% para la media del tiempo de acceso.

Relación 12: Contraste de hipótesis

1. Una empresa tiene dos delegaciones: A y B. La distribución mensual de los ingresos en millones de ptas sigue una distribución normal. Se han tomado m.a.s. de los ingresos de las dos delegaciones obteniendo para la A: 10, 7, 8, 6 y 4 millones, y para la B: 10, 5, 2, 3, 7, 3, 4 y 6 millones.

   (a) Calcular un intervalo de confianza 95% para el cociente de varianzas, ¿puede deducirse que las varianzas son iguales?

   (b) Estudiar con una significación del 5% si los ingresos medios de ambas delegaciones pueden considerarse iguales.

2. Una cadena de supermercados desea comprobar que su campaña publicitaria le ha hecho aumentar el volumen medio de ventas anuales. Para verificar esta hipótesis elige 12 supermercados de su cadena y estudia las ventas anuales (en millones de pesetas) en cada uno de ellos, durante el año anterior y el posterior a la campaña publicitaria, obteniendo los siguientes resultados

Antes	10	12	15	8	19	14	12	21	16	11	8	15
Después	11	11	17	9	21	13	16	25	20	18	10	17

   Suponiendo que las ventas se distribuyen normalmente, estudiar mediante contrastes de hipótesis si puede considerarse efectiva la campaña publicitaria.

3. Un agente de seguros visita diariamente a 5 familias para hacerles un seguro de vida. En la siguiente tabla aparecen los resultados sobre el número de seguros que hace diariamente durante 100 días elegidos al azar:

N^0 de seguros	0	1	2	3	4	5
N^0 de días	10	25	30	25	6	4

   Suponiendo que el número de seguros que hace diariamente sigue una distribución binomial, $B(5, p)$, contrastar si puede aceptarse que la proporción p es menor que 0.25.

4. El gasto diario en electricidad, en miles de ptas., de una empresa, es una v.a. con distribución $N(\mu, 1)$. Se desea contrastar con un nivel de significación del 5%, la hipótesis nula de que el gasto medio diario es de 3.000 ptas frente a la hipótesis alternativa de que dicho gasto es menor que la citada cifra. Para ello se toma una muestra de 10 días en los que el gasto fue: 2950, 2930, 3050, 3150, 2910, 2990, 3010, 3100, 3150, 3000. ¿Qué hipótesis se aceptará?

5. El laboratorio de una empresa productora de cemento ensaya la adición de productos químicos para mejorar la resistencia de unas piezas de hormigón. Para contrastar a un nivel de significación del 5% la mejora en la resistencia se toman dos m.a.s. La primera muestra se trata con un producto químico y se obtienen las resistencias (en Kg/cm^2): 348, 363, 372, 360, 359, 365, 361. Para la muestra no tratada con el producto se obtuvo: 350, 370, 340, 355, 365, 347. Se supone que la resistencia de las placas sigue una distribución normal.

   (a) Contrastar a un nivel de significación del 5% la hipótesis nula de que la resistencia de las piezas de hormigón tratadas con aditivos químicos presenta igual varianza que las no tratadas, frente a la alternativa de que dichas varianzas son distintas.

   (b) Contrastar si la resistencia media de las placas tratadas con el producto químico es mayor que la de las no tratadas, a un nivel del 5%.

6. Se desea comparar dos comunidades respecto a la proporción de personas seguidoras de un partido político. En la comunidad A se encuestaron 500 personas y 300 se declararon seguidoras de este partido. En la comunidad B lo estuvieron 680 personas de las 1000 encuestadas. ¿Hay suficiente evidencia estadística para concluir, con un nivel de significación del 5%, que es menor la proporción de seguidores en la comunidad A que en la B?

7. Se sabe que las velocidades de dos procesadores X e Y, medidas en GHz, siguen una distribución normal con medias desconocidas y varianzas de 1/3 y 1/4 GHz^2 respectivamente. En un experimento se han tomado muestras de velocidades para ambos procesadores, obteniendo los siguientes resultados:

X	1.5	1.45	1.4	1.3	1.35
Y	1.3	1.2	1.25	1.24	

   Realiza un contraste de hipótesis, con un nivel de significación de 0.05, para tratar de decidir, en base a los datos de la tabla, qué procesador puede considerarse, en promedio, más rápido.

8. Un ingeniero informático trata de decidir el lenguaje de programación que empleará en un determinado proyecto. Para ello, pide a un grupo de 12 programadores con experiencia en ambos lenguajes que implementen una determinada función tanto en el lenguaje 1 como en el 2, anotando el tiempo (en minutos) que invierten en realizar ambas implementaciones. Los datos obtenidos son los siguientes:

Programador	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Lenguaje 1	17	16	21	14	18	24	16	14	21	23	13	18
Lenguaje 2	18	14	19	11	23	21	10	13	19	24	15	20

Suponiendo que el tiempo de implementación sigue una distribución normal, y fijando un nivel de significación de 0.05, ¿por qué lenguaje debería optar el ingeniero, en base a los datos obtenidos, para minimizar el tiempo de implementación?

9. Se desea comparar experimentalmente el tiempo de acceso de dos discos duros. Se sabe que los tiempos de acceso de ambos discos, X e Y, en milisegundos (ms), siguen una distribución normal con medias desconocidas y varianzas de 1 y 1.2 ms^2 respectivamente. Para realizar la comparación, se han tomado muestras de tiempos para ambos discos, obteniendo los siguientes resultados:

X	17	15	16	16.5	15.6
Y	15.2	15	15.1	16	

Contrasta, con un nivel de significación del 95%, la hipótesis de que ambas medias son iguales.

10. Una empresa ha decidido cambiar el cableado de su red interna. El jefe del departamento de informática de dicha empresa debe decidir qué tipo de cable utilizará, pues ha recibido dos ofertas por parte de dos compañías, exactamente al mismo precio, con lo cual decide quedarse con el cable que dé menos fallos. Para tomar una decisión, decide llevar a cabo un experimento en el que realiza 1.000 transmisiones con el primer tipo de cable, de las cuales 10 son erróneas, y 500 con el segundo tipo de cable, de las cuales 10 son erróneas. Si se fija un nivel de significación de 0.05, ¿qué decisión debería tomar el jefe del departamento de informática, en base a los datos de que dispone?