

## PROBLEMAS DE INFERENCIA

1. De una población  $N(\mu, 2)$  se obtiene una muestra de tamaño 4. Se consideran los siguientes estimadores del parámetro  $\mu$ .

$$\begin{aligned}\mu_1 &= \frac{1}{4} x_1 + \frac{1}{2} x_2 + \frac{1}{2} x_3 \\ \mu_2 &= \frac{1}{3} x_1 + \frac{1}{6} x_2 + \frac{1}{3} x_3 + \frac{1}{6} x_4 \\ \mu_3 &= \frac{1}{4} x_1 + \frac{1}{4} x_2 + \frac{1}{4} x_3 + \frac{1}{4} x_4\end{aligned}$$

- a) Comprobar si los estimadores son insesgados o no, determinando su sesgo.  
b) ¿Cuál es más eficiente?

2. Una variable aleatoria  $X$  se distribuye según la siguiente función de densidad:

$$f(x) = a \cdot e^{-ax} \quad x > 0$$

- a) Calcular la esperanza y la varianza de  $X$ .  
b) Estimar  $a$  por el método de máxima verosimilitud.

3. Se considera una población representada por una variable aleatoria  $X$ , de forma que la distribución poblacional viene definida por la función de densidad:

$$f(x, \theta) = 1/\theta \quad \text{para } 0 \leq X \leq \theta$$

Si estimamos el parámetro  $\theta$  a través de:

- a) la media muestral  $\bar{x}$ , ¿es insesgado dicho estimador?  
b)  $\theta^*$  definido así:  $\theta^* = k \bar{x}$ . Determinar el valor de  $k$  para que  $\theta^*$  sea un estimador insesgado de  $\theta$ .

4. Se considera la distribución binomial  $B(n, p)$  cuyo parámetro  $p$  se desconoce. Se pide:

- a) Calcular el parámetro  $p$  por el método de máxima verosimilitud.  
b) ¿Es el estimador  $p$  obtenido centrado?

5. Considere una variable aleatoria  $X$  cuya función de densidad es

$$f(x) = 0,5(1 + \theta x) \quad -1 \leq x \leq 1$$

donde  $\theta$  es un parámetro desconocido. (Esta distribución aparece en física de partículas). Demuestre que el estimador  $\theta^* = 3 \bar{x}$  es un estimador insesgado de  $\theta$ .

6. La tasa de respuesta "y" de las fibras del nervio auditivo de gatos tiene una distribución de Poisson aproximada con media desconocida  $\lambda$ . Suponga que se midió la rapidez de respuesta de las fibras del nervio auditivo (registrada como número de picos por 200 milisegundos de ráfaga de ruido) en cada uno de una muestra aleatoria de 10 gatos. Los datos son:

15,1    14,6    12,0    19,2    16,1    15,5    11,3    18,7    17,1    17,2

Calcule una estimación puntual de la rapidez de respuesta media  $\lambda$  utilizando el método de máxima verosimilitud. ¿Es dicho estimador insesgado?

### DISTRIBUCIONES MUESTRALES

7. El dueño de una tienda de discos ha comprobado que el 20% de los clientes que entran en su tienda realizan alguna compra. Cierta mañana, entraron en esa tienda 180 personas, que pueden ser consideradas como una m.a.s. de todos sus clientes.
- a) ¿Cuál será la media de la proporción muestral de clientes que realizaron alguna compra?  
b) ¿Cuál será la varianza de la proporción muestral de clientes que realizaron alguna compra?  
c) ¿Cuál será la probabilidad de que la proporción muestral de clientes que realizaron alguna compra sea menor que 0,15?

8. Se ha tomado una muestra de 16 directores de oficinas de corporaciones de una gran ciudad, con el fin de estimar el tiempo medio diario que emplean en desplazarse para ir hasta su trabajo. Supongamos que la distribución de dichos tiempos en la población sigue una normal con media 87 minutos y desviación típica de 22 minutos.
- a) ¿Cuál es la desviación típica de la media muestral de los tiempos de desplazamiento?
  - b) ¿Cuál es la probabilidad de que la media muestral sea menor a 100 minutos?
  - c) ¿Cuál es la probabilidad de que la media muestral sea mayor a 80 minutos?
9. Para una muestra de 96 fumadores, el número medio de horas de absentismo laboral al mes fue de 2,15 y la desviación típica muestral fue de 2,09 horas al mes. Para una muestra aleatoria independiente de 206 trabajadores que nunca han fumado, el número medio de horas fue de 1,69 y la desviación típica de 1,91 horas al mes. Calcular:
- a) Probabilidad de que la media muestral de absentismo laboral de los fumadores sea mayor que la de los no fumadores.
  - b) Probabilidad de que la media muestral de absentismo laboral de los fumadores sea por lo menos mayor a la media de los no fumadores en una hora.