CONTRASTE DE HIPÓTESIS

Con el contraste de hipótesis se intenta dar respuesta a la pregunta: ¿es razonable pensar que un parámetro toma tal valor?

El contraste de hipótesis puede ser entendido como un método de toma de decisiones, es decir, un procedimiento que nos permite decidir si una proposición acerca de una población puede ser mantenida o rechazada. Necesitamos lo **primero formular una hipótesis científica**, es decir, una afirmación verificable. Necesitamos transformar la hipótesis científica (la cual se refiere a algún aspecto de la realidad), en hipótesis estadística (la cual se refiere a algún aspecto de la distribución de probabilidad).

El **segundo paso** del proceso de verificación consiste en **buscar evidencia empírica** relevante capaz de informar sobre si la hipótesis establecida es o no sostenible. Es decir, una hipótesis será compatible con los datos empíricos cuando a partir de ella sea posible deducir o predecir un resultado muestral (un estadístico) con cierta precisión.

Se nos plantea una cuestión clave que es la de determinar cuando la discrepancia encontrada es lo bastante grande como para considerar que el resultado muestral observado es incompatible con la hipótesis formulada y, en consecuencia, para hacernos pensar que esa discrepancia encontrada no es explicable por fluctuaciones debidas al azar sino por el hecho de que la hipótesis planteada es incorrecta.

El **tercer paso** es determinar una **regla de decisión** y esta regla debe establecerse en términos de probabilidad, ya que se trabaja con muestras).

En general, la regla de decisión que utilizaremos será una afirmación de este tipo: si el resultado muestral observado es, suponiendo correcta nuestra hipótesis, muy poco probable, consideraremos que nuestra hipótesis es incompatible con los datos. Por el contrario, si el resultado muestral observado es, suponiendo correcta nuestra hipótesis, probable, consideraremos que nuestra hipótesis es compatible con los datos.

En definitiva, un contraste de hipótesis es un proceso de decisión en el que una hipótesis formulada en términos estadísticos es puesta en relación con los datos empíricos para determinar si es o no compatible con ellos.

Hipótesis Estadística

Todo contraste de hipótesis se basa en la formulación de dos hipótesis:

1. Hipótesis nula (H_o).
2. Hipótesis alternativa (H_1).

La H_o es la que se somete a contraste. Consiste generalmente en una afirmación concreta sobre la forma de una distribución de probabilidad o sobre el valor de alguno de los parámetros de esa distribución.

La H_1 es la negación de la nula. Incluye todo lo que H_o excluye.

Son hipótesis exhaustivas y mutuamente exclusivas.

Ejemplos:

Contraste bilateral.

$H_o: \mu_v = \mu_m$

$H_1: \mu_v \neq \mu_m$

Contraste unilateral

$H_o: \Pi_{acierto} \leq 0,5$

$H_1: \Pi_{acierto} > 0,5$

¿Qué asignamos como H_o y H_1?

La H_o asigna un valor específico al parámetro en cuestión y por lo tanto "el igual" siempre forma parte de H_o .

La idea básica de la prueba de hipótesis es que los hechos tengan probabilidad de refutar la H_o. La H_o es la afirmación que podría ser rechazada por los hechos. El interés del investigador se expresa, por lo tanto, en la H_1.

Hay tres posibles afirmaciones de las H_o y H_1.

H_o	H_1
$\geq$	$<$
$\leq$	$>$
$=$	$\neq$

Ejemplos:

1. Suponga que cierto organismo quiere demandar a una compañía por no cumplir las normas de emisión de monóxido de carbono en el aire. El organismo desea demostrar que el nivel medio de monóxido de carbono en el aire es peligrosamente alto, superior a 4,9 partes por millón (ppm).

$$H_o: \mu \leq 4,9 \text{ ppm}$$
$$H_1: \mu > 4,9 \text{ ppm}$$

2. Un ingeniero desea demostrar que las aplicaciones de una pintura hecha con una nueva fórmula secan y están listas, para la capa siguiente,en un tiempo menor a 30 minutos.

$$H_o: \mu \geq 30 \text{ minutos}$$
$$H_1: \mu < 30 \text{ minutos}$$

3. La satisfacción en el trabajo es muy importante cuando se trata de hacer producir a los trabajadores. Directivos sindicalistas aplicaron un cuestionario estándar de satisfacción en el trabajo a una muestra de obreros de línea de montaje de una gran planta, con la esperanza de mostrar que el puntaje medio de estos trabajadores en el cuestionario es distinto de la media establecida de 68.

$$H_o: \mu = 68$$
$$H_1: \mu \neq 68$$

El punto de vista del investigador afecta en gran medida la forma en que se plantean las hipótesis. En general, el experimentador trata de demostrar que el valor del parámetro es diferente al especificado. Así espera rechazar la H_o, de modo que se justifique su teoría.

Una vez establecidas las hipótesis, se trabaja en el supuesto de que la H_o es una afirmación verdadera hasta que hay suficientes evidencias como para rechazarla.

<u>Supuestos</u>

Es necesario que la distribución poblacional con la que se va a trabajar esté completamente especificada. Este tipo de hipótesis se les llama simples.

También se debe conocer ciertas características de los datos muestrales (si la muestra es aleatoria, si los experimentos son independientes, etc.)

En definitiva, los supuestos de un contraste de hipótesis son un conjunto de afirmaciones que necesitamos establecer (sobre la población de partida y sobre la muestra utilizada) para conseguir determinar la distribución de probabilidad en la que se basará nuestra decisión.

<u>El estadístico de contraste.</u>

Un estadístico de contraste es un resultado muestral que cumple la doble condición de:

- proporcionar información empírica relevante sobre la afirmación propuesta en la H_o.
- poseer una distribución muestral conocida.

<u>La regla de decisión.</u>

Es el criterio que vamos a utilizar para decidir si la hipótesis nula planteada debe o no ser rechazada. Este criterio se basa en la partición de la distribución muestral del estadístico de contraste en dos zonas mutuamente excluyentes: la zona de rechazo y zona de aceptación.

Zona de rechazo o zona crítica, es el área de distribución muestral (distribución del estadístico) que corresponde a los valores del estadístico de contraste que se encuentran tan alejados de la afirmación establecida en

H_o, que es muy poco probable que ocurran si H_o es verdadera. Su probabilidad se denomina nivel de significación o nivel de riesgo y se representa con la letra α.

Zona de aceptación es el área de la distribución muestral que corresponde a los valores del estadístico de contraste próximos a la afirmación establecida en H_o. Es, por tanto, el área correspondiente a los valores del estadístico de contraste que es probable que ocurran si H_o es verdadera. Su probabilidad se denomina nivel de confianza y se representa por $1-\alpha$.

Ya definidas las dos zonas, la regla de decisión consiste en rechazar H_o si el estadístico de contraste toma un valor perteneciente a la zona de rechazo, o mantener H_o si el estadístico de contraste toma un valor perteneciente a la zona de aceptación.

El tamaño de las zonas de rechazo y de aceptación se determina fijando el valor de α, es decir, fijando el nivel de significación con el que se desea trabajar. Se suele tomar un 1% o un 5%.

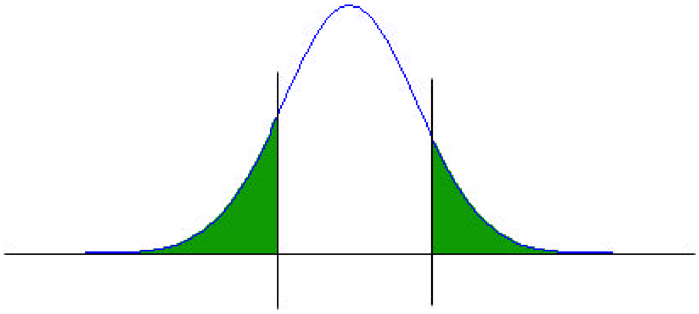
La forma de dividir la distribución muestral en zona de rechazo y de aceptación depende de si el contraste es bilateral o unilateral. La zona crítica debe situarse donde puedan aparecer los valores muestrales incompatibles con H_o.

Ejemplos:

Contraste bilateral.

$H_o: \mu_v = \mu_m$

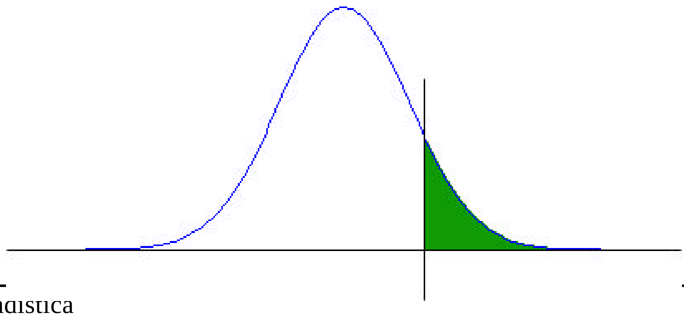
$H_1: \mu_v \neq \mu_m$



Contraste unilateral

$H_o: \Pi_{acierto} \leq 0{,}5$

$H_1: \Pi_{acierto} > 0{,}5$



En los contrastes bilaterales, la zona crítica se encuentra, generalmente, repartida a partes iguales entre las dos colas de la distribución muestral. En los contrastes unilaterales, la zona crítica se encuentra en una de las dos colas de la distribución muestral.

La Reglas de decisión son:

a) Contrastes bilaterales:

Rechazar H_o si el estadístico de contraste cae en la zona crítica, es decir, si el estadístico de contraste toma un valor tan grande o tan pequeño que la probabilidad de obtener un valor tan extremo o más que el encontrado es menor que $\alpha/2$.

b) Contraste unilateral:

Rechazar H_o si el estadístico de contraste cae en la zona crítica, es decir, si toma un valor tan grande que la probabilidad de obtener un valor como ese o mayor es menor que α.

La decisión:

Planteada la hipótesis, formulados los supuestos, definido el estadístico de contraste y su distribución muestral, y establecida la regla de decisión, el paso siguiente es obtener una muestra aleatoria de tamaño n, calcular el estadístico de contraste y tomar una decisión. Si es estadístico de contraste cae en la zona crítica se rechaza H_o. Si es estadístico cae en la zona de aceptación se mantiene H_o.

Si la rechazamos afirmamos que la hipótesis es falsa, es decir, que afirmamos con una probabilidad α de equivocarnos, que hemos conseguido probar que esa hipótesis es falsa. Por el contrario, si la mantenemos, no estamos afirmando que la hipótesis es verdadera. Simplemente que no tenemos evidencia empírica suficiente para rechazarla y que se considera compatible con los datos.

Como conclusión, si se mantiene o no rechaza H_o, nunca se puede afirmar que es verdadera.

Errores de Tipo I y II:

- Error de tipo I (e_1): Se comete cuando se decide rechazar una H_o que en realidad es verdadera. La probabilidad de cometer ese error es α.
- Error de tipo II (e_2): Se comete cuando se decide mantener una H_o que en realidad es falsa. La probabilidad de cometer ese error es β.

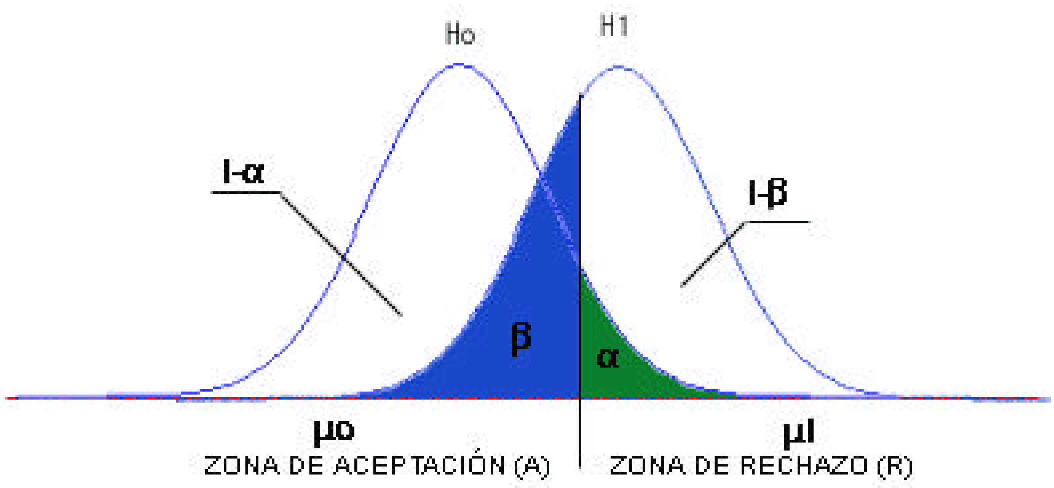
Por tanto, $1-\alpha$ será la probabilidad de tomar una decisión correcta cuando H_o es verdadera. Y $1-\beta$ será la probabilidad de tomar una decisión correcta cuando H_o es falsa. El siguiente cuadro resume las ideas:

		Naturaleza de H_o	
		Verdadera	Falsa
Decisión	Mantener H_o	Decisión correcta p= $1-\alpha$	error tipo II P= β
	Rechazar H_o	error tipo I p= α	Decisión correcta p= $1-\beta$

La probabilidad de cometer un error de tipo I con nuestra decisión es una probabilidad conocida, pues el valor de α lo fija el propio investigador. Sin embargo, la probabilidad de cometer un error de tipo II, β, es un valor desconocido que depende de tres factores:

1. La H_1 que consideremos verdadera.
2. El valor de α.
3. El tamaño del error típico (desviación típica) de la distribución muestral utilizada para efectuar el contraste.

Ejemplo:



Se utiliza la información muestral proporcionada por el estadístico media muestral ($\bar{X}$).

1. Cualquier valor atribuido a μ en H_1 (siempre mayor a μ_0) generará distribuciones muestrales distintas para $\bar{X}$. Aunque todas tendrán la misma forma, unas estarán más alejadas que otras de la curva de H_o, es decir, unas serán distintas de otras únicamente en el valor asignado a μ. Cuanto más se aleje el valor μ_1 de μ_0, más hacia la derecha se desplazará la curva H_1, y en consecuencia, más pequeña se hará el área

β. Por lo tanto, el valor de β depende del valor concreto de μ_1 que consideremos verdadero dentro de todos los afirmados por H_1.
2. Cuanto mayo es α, menor es β. Se relacionan de forma inversa.
3. Para una distancia dada entre μ_0 y μ_1, el solapamiento entre las curvas correspondientes a uno y otro parámetro será tanto mayor cuanto mayor sea el error típico de la distribución muestral representada por esas curvas (cuanto mayor es el error típico de una distribución, más ancha es esa distribución). Y cuanto mayor sea el solapamiento, mayor será el valor de β.

En el mejor de todos los mundos posibles, podrían desarrollarse procedimientos de prueba para los que ningún tipo de error es posible. Sin embargo, este ideal puede alcanzarse sólo si se basa una decisión en un examen de toda la población, lo que no es posible realizar prácticamente nunca.

La dificultad al usar un procedimiento basado en datos muestrales es que debido a la variabilidad de muestreo, puede resultar una muestra no representativa, y por tanto, resultaría un rechazo erróneo de H_o.

En lugar de buscar procedimientos libres de error, debemos buscar procedimientos para los que no sea probable que ocurra ningún tipo de estos errores. Esto es, un buen procedimiento es aquel para el que es pequeña la probabilidad de cometer cualquier tipo de error. La elección de un valor particular de corte de la región de rechazo fija las probabilidades de errores tipo I y tipo II.

Debido a que H_o especifica un valor único del parámetro, hay un solo valor de α. Sin embargo, hay un valor diferente de β por cada valor del parámetro recogido en H_1.

Ejemplo:

Se sabe que cierto tipo de automóvil no presenta daños visibles el 25% de las veces en pruebas de choques a 10 millas por hora (mph). Se ha propuesto un diseño modificado de parachoques en un esfuerzo por aumentar este porcentaje.

Denotemos por p la proporción de todos los choques a 10 mph con este nuevo para choques que resultan sin daño visible. La hipótesis a probarse son:

H_o: $p \leq 0{,}25$

H_1: $p > 0{,}25$

La prueba estará basada en un experimento en donde ocurran n=20 choques independientes con prototipos del nuevo diseño. Intuitivamente, H_o debe ser rechazada si un número importante de los choques no muestra averías.

Considérese el siguiente procedimiento de prueba:

$X \rightarrow$ número de choques sin daño visible.

Se establece la siguiente partición de la distribución de probabilidad de x:

$R=\{8,9,10, \ldots, 20\}$; esto es, rechazar H_o si $x \geq 8$ donde x es el valor observado del estadístico de prueba.
Cuando H_o es verdadera, X tiene una distribución binomial de probabilidad con n=20 y p=0,25. Por lo tanto,
α= P(e_1)= P(H_o es rechazada siendo verdadera)= P($x \geq 8$ cuando
X? B(20,0,25))= $1-t_7$= 0,102
Esto es, cuando H_o es realmente verdadera, aproximadamente el 10% de todos los experimentos formados por 20 choques derivarían en que H_o sería incorrectamente rechazada (Error tipo I).
En contraste con α, no hay una sola β. Existe una β diferente para cada p distinta que exceda de 0,25. Por lo tanto, hay un valor de β para p=0,3 y otro para p=0,5, etc.
Por ejemplo para p=0,3
β= P(e_2)=P(mantener H_o si es falsa porque p=0,3)=P($x \leq 7$ cuando
X? B(20,0,3))= t_7 = 0,772
Cuando p, en realidad, es 0,3 en lugar de 0,25 (una pequeña desviación de H_o) casi el 77% de todos los experimentos de este tipo derivarían en que H_o se mantendría incorrectamente.
La tabla siguiente muestra β para valores seleccionados de p con la misma región de rechazo (R). Es claro que β disminuye a medida que el valor de p se aleja a la derecha del valor nulo de 0,25. Intuitivamente, cuanto mayor sea la desviación de H_o es menos probable que dicha desviación no sea detectada.

p	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
β	0,772	0,416	0,132	0,021	0,001	0,000

Si cambiamos la Región de rechazo (R) por $R=\{9,10, \ldots, 20\}$ siendo
X? B(20,0,25) entonces
α= P(e_1)= P(rechazar H_o cuando p= 0,25)= P($x \geq 9$ cuando
X? B(20,0,25))= $1-t_8$= 0,041
La P(e_1) se ha reducido mediante el uso de la nueva Región de rechazo. Sin embargo, se ha pagado un precio por esta reducción ya que
β= P(e_2)=P(mantener H_o si es falsa porque p=0,3)=P($x \leq 8$ cuando
X? B(20,0,3))= t_8 = 0,887

En general, un buen contraste o buena regla de decisión debe tender a minimizar los dos tipos de error inherentes a toda decisión. Como α queda fijado por el investigador, trataremos de elegir una región donde la probabilidad de cometer el error de tipo II sea la menor.