Alumno:	
Grupo:	

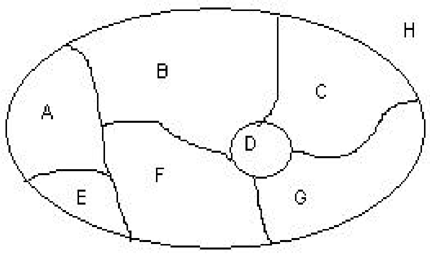
Coloración de grafos

Comencemos planteando el problema de dar color a las regiones de un mapa plano de modo que a regiones vecinas se les asigne distinto color.

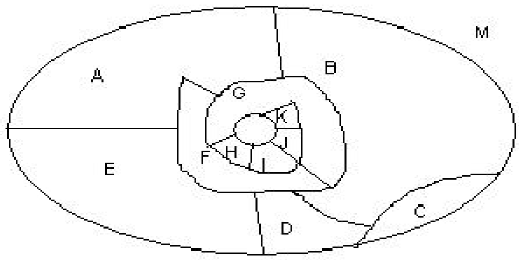
Este problema puede ser resuelto asignando a cada región un color diferente; pero, en mapas con muchas regiones esta solución no resulta eficiente, pues serían necesarios demasiados colores. Además, si se quiere reproducir un mapa por procedimientos gráficos, es interesante utilizar pocos colores para rentabilizar la producción. Por lo tanto, nos planteamos el problema de *colorear un mapa asignando colores distintos a regiones vecinas, pero utilizando el mínimo número de colores posible.*

Ejercicio 1: a) Colorear el mapa A en la figura con 3 colores distintos y el mapa B con 4 colores distintos, excluyendo la región exterior no acotada.

Mapa A



Mapa B



b) Dar alguna razón para que el mapa A no pueda ser coloreado con 2 colores:

Por tanto, el mínimo número de colores para colorear A es:

c) Dar alguna razón para que el mapa B no pueda ser coloreado con 3 colores:

Por tanto, el mínimo número de colores para colorear B es:

Todo mapa plano puede ser representado por un grafo plano, que llamaremos ***grafo dual***. Para construir el grafo dual de un mapa representamos cada región del mapa por un vértice incluyendo un vértices que represente la región exterior no acotada, cada par de regiones vecinas se representarán uniendo mediante una arista los dos vértices correspondientes (dos regiones cuyas fronteras coinciden sólo en un punto no se consideran vecinas). Así, el problema de coloreado de un mapa se convierte en el problema de coloreado de los vértices de un grafo de modo que no haya dos vértices adyacentes con el mismo color. Obsérvese que el grafo dual de un mapa es un grafo simple.

Ejercicio 2: Dar la representación gráfica de los grafos duales de los mapas A y B anteriores.

<u>Definición</u>: Una *coloración* de un grafo simple es una asignación de color a cada vértice del grafo de modo que a vértices adyacentes les corresponda distinto color.

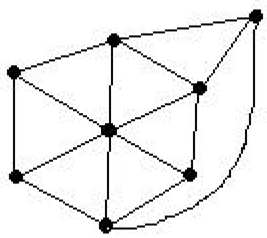
Del mismo modo que el caso de mapas, cabe preguntarse: ¿cuál es el mínimo número de colores necesario para colorear un grafo?

<u>Definición</u>: El *número cromático de un grafo* es el mínimo número de colores necesarios para colorear éste. Denotaremos por $\aleph(G)$ el número cromático del grafo G.

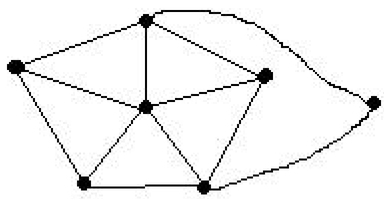
Uno de los más famosos teoremas en Matemáticas resuelve el problema del número cromático para grafos planos.

<u>Teorema de los cuatro colores</u>: *El número cromático de un grafo plano es menor o igual que cuatro.*

Ejercicio 3: Establecer el número cromático de los siguientes grafos planos G y G', justificando la respuesta.



Grafo G



Grafo G'

El teorema de los cuatros colores es válido sólo para grafos planos, de hecho existen grafos no planos con número cromático n para todo n natural.

Veamos a continuación un algoritmo de coloreado de grafos que nos puede ayudar a aproximar el número cromático. Este algoritmo nos proporciona una coloración para cualquier grafo plano, pero ésta puede usar más colores que el número cromático; por lo tanto, este algoritmo no es óptimo.

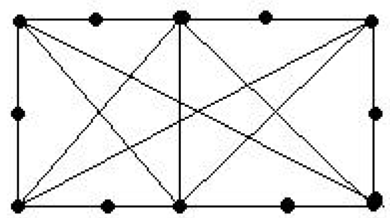
Algoritmo de coloreado: Comencemos ordenando los vértices de G, v_1, v_2, ..., v_n en orden decreciente según su grado $\delta(v_1) \geq \delta(v_2) \geq \ldots \geq \delta(v_n)$.

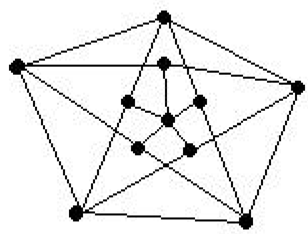
Asignar el color 1 a v_1. Recorriendo ordenadamente la lista de vértices asignar el color 1 al siguiente vértice en la lista que no sea adyacente a v_1 (si existe), continuando por la lista asignar también el color 1 a cada vértice que no sea adyacente a un vértice al que ya se le ha asignado el color 1.

Entonces, asignar el color 2 al primer vértice de la lista que no haya sido ya coloreado, y siguiendo ordenadamente con los vértices todavía no coloreados asignar también el color 2 a los vértices que no sean adyacentes a un vértice con color 2.

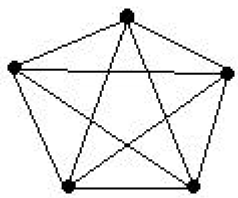
Si quedan vértices sin colorear elegir un color 3 para el primer vértice no coloreado y continuar como con los colores 1 y 2.

Ejercicio 4: Construir, usando el algoritmo anterior una coloración del siguiente grafo, indicando sobre el grafo con v_1, v_2, … la ordenación dada los vértices y con diferentes números los colores para cada vértice.





Ejercicio 5: a) Encontrar un coloreado para el grafo completo de cinco vértices K_5.



¿Puedes encontrar una coloración con menos colores que la obtenida arriba? ________
¿Por qué? ____

____

¿Cuál es el número cromático de K_5? ___________

Extrapola los razonamientos hechos sobre K_5 y concluye cuál es el número cromático de K_n: _____

b) Dibuja el grafo bipartito $K_{3,5}$ y obtén una coloración suya por el algoritmo anterior.

Concluye cuál es el número cromático de $K_{3,5}$, justificando la respuesta. ________________________
____ .

¿Cuál es entonces el número cromático de cualquier grafo bipartito? ______

c) Se denomina grafo cíclico de n vértices, y se denota por C_n, al grafo cuyos vértices y aristas se corresponden con los vértices y aristas del polígono regular de n lados. Estudiar el número cromático de C_n. (Indicación: el número cromático de C_n es diferente para n par o impar. Como en los casos anteriores estudiar algún caso concreto, por ejemplo C_5 y C_6, y luego generalizar).

La coloración de vértices en un grafo tiene aplicación a múltiples problemas relacionados con asignaciones y programaciones. Por ejemplo, cuál es el número mínimo de días que hay que disponer para programar los exámenes de un centro de modo que un estudiante no tenga que hacer dos exámenes el mismo día.

Resolvamos ahora un problema de asignación de canales de televisión a varias emisoras.

NOTA: Los dos problemas siguientes deben estar debidamente explicados y justificados.

Ejercicio 6: El departamento informático de una empresa se compone de los seis comités que se enumeran acontinuación:

C_1 = {Alonso, Beléndez, Solán} C_2 = { Beléndez, Serrano, Rey}
C_3 = {Alonso, Rey, Solán} C_4 = { Serrano, Rey, Solán}
C_5 = {Alonso, Beléndez } C_6 = { Beléndez, Rey, Solán}

Estos comités se reúnen una día al mes. ¿Cuántas horas de reunión diferentes habrá que programar como mínimo para que nadie tenga dos reuniones a la vez?

Ejercicio 6: a) En unos laboratorios químicos hay que almacenar un pedido compuesto por un total de siete sustancias químicas diferentes que distinguiremos con los números del 1 al 7. Así mismo, la naturaleza de estas sustancia es tal que para todo $2 \leq i \leq 5$ la sustancia i no puede almacenarse en el mismo compartimento que la sustancia i-1 o la i+2. Determinar el mínimo número de compartimentos que se necesitan para almacenar de forma segura estas siete sustancias.

b) Supongamos que además de las condiciones de la parte a), los cuatro pares siguientes de las siete mismas sustancias requieren también compartimentos separados: 1 y 4, 2 y 5, 2 y 6, 3 y 6. ¿Cuál es el menor número de compartimentos de almacenamiento que se necesitan ahora?