Aritmética modular

1.- Encontrar el menor entero no negativo congruente módulo 7 del número:
a) 23; b) 35; c) –48; d) –64.

2.- Sabiendo que
$1234567 \equiv 7 \pmod{10}$, $90123 \equiv 3 \pmod{10}$, $2468 \equiv 18 \pmod{25}$ y $13579 \equiv 4 \pmod{25}$
calcular el menor entero no negativo x tal que: a) $1234567 \cdot 90123 \equiv x \pmod{10}$
b) $2468 \cdot 13579 \equiv x \pmod{25}$

3.- Demostrar que si p es primo y $p \geq 5$, entonces $p \equiv 1 \pmod 6$ ó $p \equiv 5 \pmod 6$.

4.- Sea $(x_n\, x_{n-1} \ldots x_0)$ la representación en base 10 de un número positivo x. Demostrar que

$$x \equiv x_0 - x_1 + x_2 - \ldots + (-1)^n x_n \pmod{11}$$

y utilizar este resultado para comprobar si los números 1213141516171819 y 192837465564738291 son divisibles por 11.

5.- Averiguar la cifra x que falta en la igualdad $871782x1200 = 14!$.

6.- Comprobar mediante un ejemplo que $\mathbf{Z}_6$, $\mathbf{Z}_8$ y $\mathbf{Z}_{15}$ existen números x, y distintos de cero que verifican $x \cdot y=0$. ¿Existe algún ejemplo en $\mathbf{Z}_7$?

7.- Hallar los elementos inversibles de $\mathbf{Z}_6$, $\mathbf{Z}_7$, $\mathbf{Z}_8$ y $\mathbf{Z}_{18}$.

8.- Hallar los inversos de:

a) 6 en $\mathbf{Z}_{11}$	b) 6 en $\mathbf{Z}_{17}$	c) 3 en $\mathbf{Z}_{10}$	d) 5 en $\mathbf{Z}_{12}$
e) 2 en $\mathbf{Z}_{11}$	f) 7 en $\mathbf{Z}_{15}$	g) 7 en $\mathbf{Z}_{16}$	h) 5 en $\mathbf{Z}_{13}$

9.- Usar el teorema de Fermat para calcular los restos de dividir 3^{47} entre 23 y de dividir 6^{592} entre 11.

10.- Obtener los restos de dividir 3^{15} entre 17 y de dividir 15^{90} entre 13.

11.- Probar que la suma de los cubos de tres enteros consecutivos es divisible por 9.

12.- Demostrar que: 11 divide a $a^2+5b^2 \iff$ 11 divide a a y 11 divide a b

13.- Demostrar:

a) Para todo $n \in \mathbf{N}$, $2n^3+3n^2+n$ es divisible por 6.
b) Para todo $n \in \mathbf{N}$, n^2+4n+6 es divisible por 5.
c) Para todo $n \in \mathbf{N}$, $3^{3n+3}-26n-27$ es múltiplo de 169.
d) Para todo $n \in \mathbf{N}$, $(2n+1)^2-1$ es divisible por 8.
e) Para todo $p \in \mathbf{N}$ con p primo, $3^p+(-2)^p+(-1)^p$ es divisible por p.

14.- Determinar el menor entero positivo que deja restos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9 al ser dividido por 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y 10 respectivamente.

15.- Resolver las ecuaciones

a) $10x \equiv 146 \pmod{12}$ b) $3x \equiv 7 \pmod{15}$ c) $4x \equiv 3 \pmod{7}$ d) $3x \equiv 9 \pmod{15}$

16.- Determinar el resto de dividir $3^{2n+2}+2^{6n+1}$ por 11 y de dividir 18! por 437.

17.- Demostrar que $138!+197^{138}$ es divisible por 139 y que $20^{15}-1$ es divisible por $11{\cdot}31{\cdot}61$.

18.- Demostrar que si 3^n+1 es múltiplo de 10 entonces $3^{n+4}+1$ es múltiplo de 10, para $n \in \mathbf{N}$.