RELACIONES Y RELACIONES DE EQUIVALENCIA

1.- Dados los conjuntos $A=\{1,2,3,4\}$; $B=\{1,3,5\}$ y dada la relación R definida de A en B por $a\ R\ b \iff a<b$, escribir los pares de la relación y su matriz.

2.- Sea $A=\{a,b,c,d\}$ y R la relación en A cuya matriz es:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Determinar los conjuntos $E_b=\{x\in A : (x\ ,\ b)\in R\}$, $F_d=\{\ x\in A : (d\ ,\ x)\in R\}$.

3.- Sea la relación en **N** definida por:

$$R=\{(1,5),(4,5),(1,4),(4,6),(3,7),(7,6)\}$$

Calcular Dom(R), Im(R) y R^{-1} (Nota: R^{-1} es la relación inversa de R que se define: $a\ R^{-1}\ b$ si y sólo si $b\ R\ a$.

4.- En el conjunto $A=\{1,2,3,4\}$ se considera la relación $R=\{(1,1),(2,2),(1,3),(3,1),(3,3),(3,4)\}$. Averiguar qué propiedades cumple y cuáles no, y demostrarlo.

5.- Sea $A=\{1,2,3,4,5\}$ y R la relación en A cuya matriz es:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcular Dom(R), Im(R) y la matriz de R^{-1}.

6.- En el conjunto $A=\{a,b,c,d\}$ se definen las relaciones $R=\{(b,b),(b,c),(a,d),(d,b)\}$ y $S=\{(a,b),(c,a),(d,a)\}$. Hallar:

a) La matriz y el digrafo de cada una.
b) $(R\circ S)^{-1}$, $S\circ R$, $(S\cup R)^{-1}$ y la matriz de cada una de ellas.
c) Dom(R) e Im(S^{-1}).

7.- En el conjunto de los números naturales N se define la relación: $x\ R\ y \iff 2x+y=16$. Averiguar qué propiedades cumple y cuáles no y demostrarlo.

8.- En el conjunto $A=\{1,2,3,4\}$ se consideran las siguientes relaciones: $R_1=\{(1,1),(1,2)\}$, $R_2=\{(1,1),(2,3),(4,1)\}$, $R_3=\{(1,3)(2,4)\}$, $R_4=\{(1,1),(2,2),(3,3)\}$, $R_5=A\text{x}A$, $R_6=\emptyset$. Determinar cuáles son reflexivas, simétricas, transitivas.

9.- Sean el conjunto A=$\{1,2,3,4,5,6\}$ y la relación $R=\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,3),(4,4),(4,5),(5,4),(5,5),(6,6)\}$en A. ¿Es R una relación de equivalencia? Dar el conjunto cociente.

10.- Si $A=A_1 \cup A_2 \cup A_3$, donde $A_1=\{1,2\}$, $A_2=\{2,3,4\}$ y $A_3=\{5\}$, definimos en A la relación R dada por xRy si y sólo si x e y están en el mismo conjunto A_i (i=1,2,3). ¿Es R relación de equivalencia?

11.- En $\mathbf{R}^2$ se considera la relación de equivalencia R siguiente: $(x_1,y_1)\ R\ (x_2,y_2)$ si y sólo si $x_1=x_2$. Demsotrar que R es relación de equivalencia y representar geométricamente, en el plano real, las clases de equivalencia.

12.- Sea $A=\{1,2,3,4,5\}\times\{1,2,3,4,5\}$ y sea la relación R en A definida por:

$$R\ (c,d) \text{ si y sólo si } a+b=c+d.$$

Demostrar que R es de equivalencia. Determinar las clases [(1,3)], [(2,4)] y [(1,1)]. Determinar la partición de A originada por R.

13.- Sean $A=\{1,2,3,4,5,6,7\}$ y una relación R en el conjunto A definida por:

$$x\ R\ y \Leftrightarrow x\text{-}y \text{ es múltiplo de } 3$$

Demostrar que R es de equivalencia y calcular las clases de equivalencia originadas por R.

14.- En **Z**x**Z** se define la siguiente relación: $(a,b)\ R\ (c,d) \Leftrightarrow ad=bc$. Demostrar que es una relación de equivalencia y calcular la clase de equivalencia [(4,8)].

15.- En el conjunto **N**x**N** se define la relación: $(a,b)\ R\ (c,d) \Leftrightarrow a+d= b+c$.
Comprobar que R es una relación de equivalencia y calcular la clase de equivalencia del par (3,7).

16.- En el conjunto **Z** de los números enteros se define la siguiente relación: $x\ R\ y \Leftrightarrow x^2-y^2=x-y$.
¿Es R una relación de equivalencia?
En caso afirmativo, ¿cuál es la clase asociada al elemento a de **Z**?

17.- En el cuerpo **Q** (números racionales) se definen la siguiente relación binaria:

$$x\ R\ y \quad \Leftrightarrow \quad \text{existe } h\in \mathbf{Z} \text{ tal que } x=\frac{3y+h}{3}.$$

Probar que R es una relación de equivalencia y determinar el conjunto cociente. Razonar si los elementos 2/3 y 4/5 pertenecen a la misma clase.

18.- En el conjunto $\mathbf{R}^*$ (números reales no nulos) se define la siguiente relación:

$$a\ R\ b \quad \Leftrightarrow \quad a+(1/a)= b+(1/b)$$

Demostrar que R es una relación de equivalencia y dar los elementos de la clase de equivalencia $[a]$.

19.- En el conjunto **N** de los números naturales se define la siguiente relación:

$$x\ R\ y \quad \Leftrightarrow \quad E\left(\sqrt{x}\right)=E\left(\sqrt{y}\right)$$

siendo $E(x)$= parte entera de x en **R** (números reales). Se pide:

a) ¿Es R una relación de equivalencia en N?
b) En caso afirmativo, ¿cuál es la clase de equivalencia asociada al elemento a de **N**?
c) El conjunto cociente, ¿cuál es?

20.- En el plano Euclídeo $\mathbf{R}^2$, se considera un punto fijo O. Dados A y B puntos arbitrarios de $\mathbf{R}^2$ se establece la relación:

$$A\ R\ B \quad \Leftrightarrow \quad \text{longitud del segmento } OA = \text{longitud del segmento } OB$$

Demostrar que R es de equivalencia, calcular las clases de equivalencia y el conjunto cociente

21.- En el conjunto de puntos del plano Euclídeo $\mathbf{R}^2$ se define la relación: Si $A=(x,y)$ y $A'=(x',y')$ son puntos del plano, $A\ R\ A' \Leftrightarrow xy=x'y'$. ¿Es R relación de equivalencia? En caso afirmativo, encontrar sus clases.