PROBLEMA RESUELTO DE LA HOJA 4

8 Se define la aplicación $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ de manera que: $f(e_1) = u_1 - u_2$, $f(e_2) = u_2$, $f(e_3) = u_1$, siendo $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ y $B' = \{u_1, u_2, u_3\}$ bases de $\mathbb{R}^3$. Se pide:

a) Matriz asociada a f en las bases B y B'.

La matriz asociada a f en las bases B y B' es

$$\begin{pmatrix} | & | & | \\ f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \\ | & | & | \end{pmatrix},$$

donde $f(e_1)$, $f(e_2)$ y $f(e_3)$ están en coordenadas de la base B'. Ahora obtenemos las coordenadas de $f(e_1)$, $f(e_2)$ y $f(e_3)$ en base $B' = \{u_1, u_2, u_3\}$:

$$\begin{aligned} f(e_1) &= u_1 - u_2 = 1u_1 + (-1)u_2 + 0u_3 = (1, -1, 0)_{B'} \\ f(e_2) &= u_2 = 0u_1 + (1)u_2 + 0u_3 = (0, 1, 0)_{B'} \\ f(e_3) &= u_1 = 1u_1 + 0u_2 + 0u_3 = (1, 0, 0)_{B'}. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$M_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Dimensión de la imagen de f.

La dimensión de la imagen de f es igual al rango de la matriz M_f que hemos obtenido en el apartado anterior. O lo que es lo mismo, el número de vectores linealmente independientes del conjunto $\{f(e_1), f(e_2), f(e_3)\}$. En rango de M_f es claramente 2. Por tanto, $dim(Im(f)) = 2$.

c) Base del núcleo de f.

Hay que resolver el sistema homogéneo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Estos es la ecuación implícita del núcleo, las ecuaciones paramétricas salen resolviendo el sistema homogéneo

$$\begin{aligned} x &= \lambda \\ y &= \lambda \\ z &= -\lambda \end{aligned}$$

Como $(x, y, z)_B = (\lambda, \lambda, -\lambda)_B = \lambda(1, 1, -1)_B$, entonces una base de $Ker(f)$ es $\{(1, 1, -1)_B\}$.

d) Ecuaciones implícitas de $f(V)$ siendo $V = \{(x, y, z) | x = a, y = a, z = a + b\}$.

Nos dan las ecuaciones paramétricas de $f(V)$ (donde los parámetros son a y b). Como $(x, y, z)_B = (a, a, a + b)_B = (a, a, a)_B + (0, 0, b)_B = a(1, 1, 1)_B + b(0, 0, 1)_B$, entonces una base de V es $\{(1, 1, 1), (0, 0, 1)\}$.

Un sistema generador de $f(V)$ está formado por $\{f((1, 1, 1)_B), f((0, 0, 1)_B)\}$. Utilizando la matriz M_f obtenemos que $f((1, 1, 1)_B) = (2, 0, 0)_{B'}$ y $f((0, 0, 1)_B) = (1, 0, 0)_{B'}$. A partir del sistema generador $\{f((1, 1, 1)_B), f((0, 0, 1)_B)\} = \{(2, 0, 0)_{B'}, (1, 0, 0)_{B'}\}$ obtenemos la base $\{(1, 0, 0)_{B'}\}$ del subespacio vectorial $f(V)$. Para pasar una base a ecuaciones implícitas tenemos ver que imponer la siguiente condición:

$$\text{rango} \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & y \\ 0 & z \end{pmatrix} = 1.$$

Entonces, se debe verificar que $\begin{vmatrix} 1 & x \\ 0 & y \end{vmatrix} = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & x \\ 0 & z \end{vmatrix} = 0$. Es decir, las ecuaciones implícitas son $y = 0$, $z = 0$.

e) Si en $\mathbb{R}^3$ se realiza el cambio de base $B_1^* = \{e_1', e_2', e_3'\}$ donde $e_1 = e_1'$, $e_2 = e_1' + e_2'$, $e_3 = e_1' + e_3'$; calcular la nueva matriz asociada a f en las bases B_1^* y B'.

La matriz asociada a f en las bases B_1^* y B' es

$$\begin{pmatrix} | & | & | \\ f(e_1') & f(e_2') & f(e_3') \\ | & | & | \end{pmatrix},$$

donde $f(e_1')$, $f(e_2')$ y $f(e_3')$ están en coordenadas de la base B'. Primero observemos que $f(e_1') = f(e_1) = (1, -1, 0)_{B'}$. Después

$$\begin{aligned} f(e_2') &= f(e_2 - e_1') = f(e_2) - f(e_1') = f(e_2) - f(e_1) = (0,1,0)_{B'} - (1,-1,0)_{B'} = (-1,2,0)_{B'} \\ f(e_3') &= f(e_3 - e_1') = f(e_3) - f(e_1') = f(e_3) - f(e_1) = (1,0,0)_{B'} - (1,-1,0)_{B'} = (0,1,0)_{B'}. \end{aligned}$$

Por tanto, la matriz buscada es

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$