4. Aplicaciones Lineales

4.1. Aplicaciones Lineales. Núcleo e Imagen.

- Una aplicación lineal f entre los espacios vectoriales V y W es una aplicación $f : V \longrightarrow W$ que verifica:

  1. $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$ para todo $v_1, v_2 \in V$;
  2. $f(\lambda v) = \lambda f(v)$ para todo $v \in V$ y todo $\lambda \in K$.

- **Propiedades:**

  1. $f(0) = 0$;
  2. $f(-v) = -f(v)$;
  3. $f(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n) = \lambda_1 f(v_1) + \cdots + \lambda_n f(v_n)$;
  4. Si $\{v_1, \ldots, v_n\}$ son l.d. $\Longrightarrow \{f(v_1), \ldots, f(v_n)\}$ son l.d.;
  5. En general, una aplicación lineal no conserva sistemas l.i.

- **Proposición:** una aplicación lineal queda determinada por las imágenes de una base de V.

- Dada una aplicación lineal $f : V \longrightarrow W$

  El **núcleo** de f es $\ker f = \{v \in V : f(v) = 0\}$

  La **imagen** de f es

  $$\mathrm{im} f = f(V) = \{w \in W : \text{existe } v \text{ tal que } f(v) = w\}$$

- **Teorema:**
  1. $\ker f$ es subespacio de V;
  2. $\mathrm{Im} f$ es subespacio de W;
  3. f es inyectiva $\iff \ker f = \{0\}$;
  4. f es sobreyectiva $\iff Im(f) = W$.

- Un monomorfismo es una aplicación lineal inyectiva

  Un epimorfismo es una aplicación lineal sobreyectiva

  Un isomorfismo es una aplicación lineal biyectiva

4.2. Matriz asociada a una aplicación lineal. Ecuaciones y dimensión del núcleo y de la imagen

- **Observación:** Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$, entonces la siguiente aplicación es lineal

$$\begin{array}{rccc} f_A: & \mathbb{R}^m & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} & \longrightarrow & A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}. \end{array}$$

- **Teorema:** sea $f : V \longrightarrow W$ una aplicación lineal y sean $\mathcal{B}_V$, $\mathcal{B}_W$ bases de V y de W respectivamente. Entonces, existe una matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times m}$ donde $n = \dim(W)$ y $m = \dim(V)$ tal que $A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_V}$ nos da $f(x)$ en las coordenadas de $\mathcal{B}_W$.

- A la matriz A se la llama **matriz asociada a f en las bases $\mathcal{B}_V$ y $\mathcal{B}_W$**. Se la denota con $M_{f,\mathcal{B}_V,\mathcal{B}_W}$.

  $M_{f,\mathcal{B}_V,\mathcal{B}_W}$ contiene en columnas las imágenes de los vectores de $\mathcal{B}_V$ en las coordenadas de $\mathcal{B}_W$. Si $\mathcal{B}_V = \{v_1, \ldots, v_m\}$, entonces

$$M_{f,\mathcal{B}_V,\mathcal{B}_W} = \left(\begin{array}{ccc} | & & | \\ f(v_1) & \cdots & f(v_m) \\ | & & | \end{array} \right)$$

  donde las coordenadas de $f(v_1), \ldots, f(v_m)$ están en base $\mathcal{B}_W$.

- **Cálculo del núcleo de una aplicación lineal**

  Las ecuaciones implícitas de $M_{f,\mathcal{B}_V,\mathcal{B}_W}$ son

$$\begin{aligned} \ker f &= \{x \in V : f(x) = 0\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_V} \in V : M_f \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_V} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_W} \right\} \end{aligned}$$

- **Cálculo de la imagen de una aplicación lineal**

  Sea $f : V \longrightarrow W$ una aplic lineal y $\{v_1, \ldots, v_n\}$ sistema generador de $V \Longrightarrow \{f(v_1), \ldots, f(v_n)\}$ es sistema generador de $\mathrm{Im}(f)$.

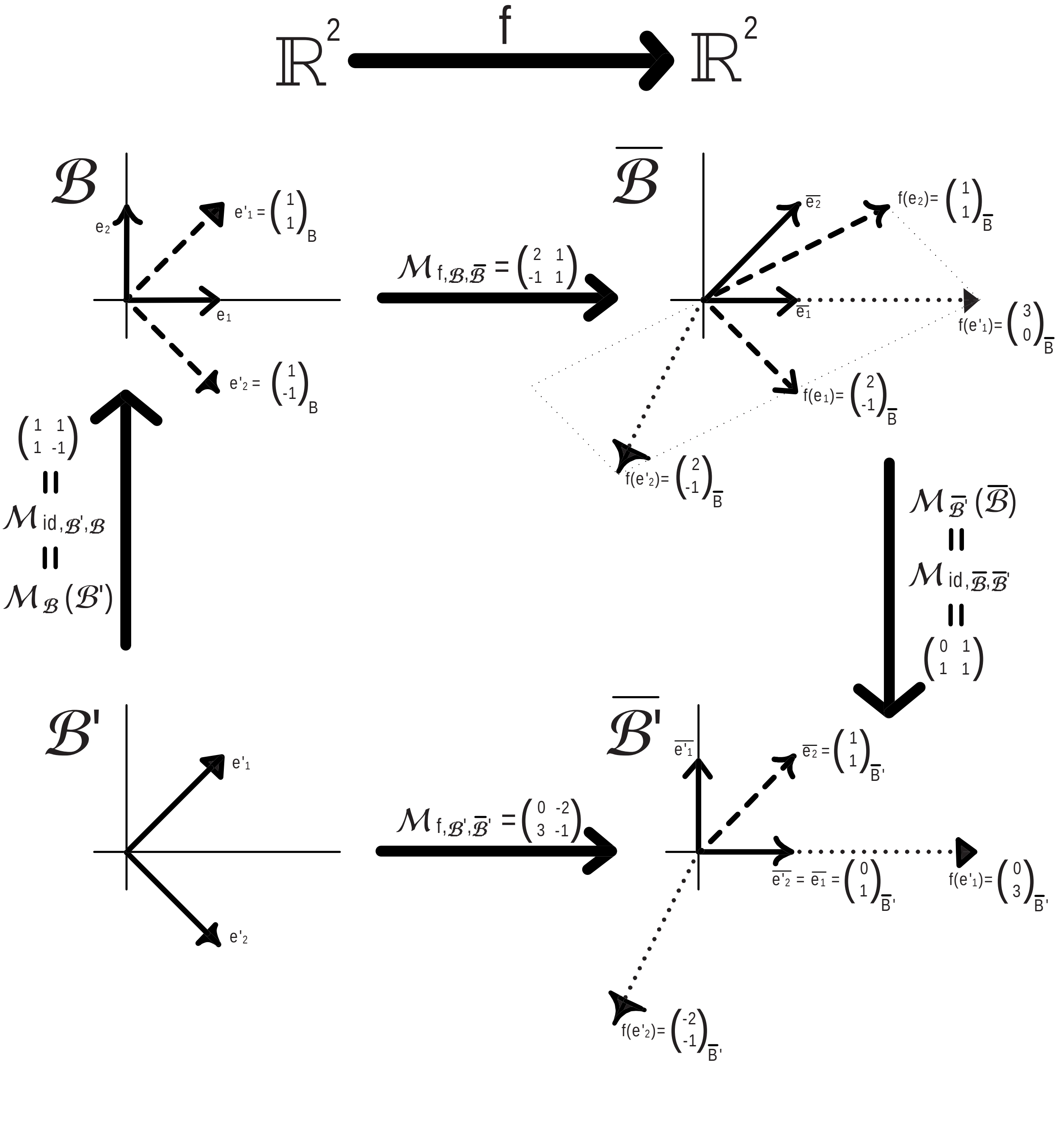
  Por tanto,

  $\dim(\mathrm{Im}(f)) = \mathrm{rango}(f(v_1), \ldots, f(v_n)) = \mathrm{rango}\ M_{f,\mathcal{B}_V,\mathcal{B}_W}$.

- **Fórmula de la dimensión de aplic lineales**

$$\dim(V) = \dim(\ker f) + \dim(\mathrm{Im} f)$$

4.3. Cambio de base de aplicaciones lineales



$$\mathcal{M}_{f,\mathcal{B}',\overline{\mathcal{B}'}} = \mathcal{M}_{\overline{\mathcal{B}'}}(\overline{\mathcal{B}})\ \ \mathcal{M}_{f,\mathcal{B},\overline{\mathcal{B}}}\ \ \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$$

- **Operaciones con aplicaciones lineales**

1. **Suma:** sean $f : V \longrightarrow W$ y $g : V \longrightarrow W$ aplic lineales, la aplic lineal suma es

$$\begin{aligned} f+g \,:\, V &\longrightarrow W \\ v &\longrightarrow (f+g)(v) := f(v)+g(v) \end{aligned}$$

Se verifica que $M_{f+g,\mathcal{B}_V,\mathcal{B}_W} = M_{f,\mathcal{B}_V,\mathcal{B}_W} + M_{g,\mathcal{B}_V,\mathcal{B}_W}$.

2. **Producto por escalar:** sea $f : V \longrightarrow W$ una aplic lineal y $\lambda \in K$, la aplic lineal producto por λ es

$$\begin{aligned} \lambda f \,:\, V &\longrightarrow W \\ v &\longrightarrow (\lambda f)(v) := \lambda f(v) \end{aligned}$$

Se verifica que $M_{\lambda f,\mathcal{B}_V,\mathcal{B}_W} = \lambda M_{f,\mathcal{B}_V,\mathcal{B}_W}$.

3. **Composición:** sean $f : V \longrightarrow W$ y $g : W \longrightarrow U$ aplic lineales, la aplic lineal composición es

$$\begin{aligned} g\circ f \,:\, V &\longrightarrow U \\ v &\longrightarrow (g\circ f)(v) := g(f(v)) \end{aligned}$$

Se verifica que $M_{g\circ f,\mathcal{B}_V,\mathcal{B}_U} = M_{g,\mathcal{B}_W,\mathcal{B}_U}\, M_{f,\mathcal{B}_V,\mathcal{B}_W}$.

4. **Inversa:** sea $f : V \longrightarrow W$ una aplic lineal biyectiva. Entonces, $f^{-1} : W \longrightarrow V$ es la aplic lineal que verifica que $f^{-1}\circ f$ es la aplic identidad de V, y $f \circ f^{-1}$ es la identidad de W.
Se verifica que $M_{f^{-1},\mathcal{B}_W,\mathcal{B}_V} = (M_{f,\mathcal{B}_V,\mathcal{B}_W})^{-1}$.