APLICACIONES DE LAS MATRICES Y LOS SISTEMAS LINEALES

Alumno:	
Grupo:	

Sobre cambios de moneda extranjera

Problema nº 1.- Un empresario estadounidense necesita cantidades fijas de yenes japoneses, libras inglesas y marcos alemanes durante cada viaje de negocios. Este año viajó 3 veces. La primera vez necesitó un total de $2.550 con las siguientes tasas: 100 yenes por dólar, 0'6 libras por dólar y 1'6 marcos por dólar. La segunda vez necesitó $2.840 en total con tasas de 125 yenes, 0'5 libras y 1'2 marcos por dólar. La tercera vez necesitó un total de $2.800 a 100 yenes, 0'6 libras y 1'2 marcos por dólar. ¿Cuál es la cantidad fija de yenes, marcos y libras que cambia en los viajes?

Circuitos eléctricos

La intensidad de las corrientes y las caídas de voltaje en un circuito eléctrico se rigen por las Leyes de Kirchhoff.

LEY DE KIRCHHOFF DE LA CORRIENTE: La suma algebraica de todas las corrientes en cualquier nodo es cero.

LEY DE KIRCHHOFF DEL VOLTAJE: La suma algebraica de todos los cambios de potencial en cualquier bucle es cero.

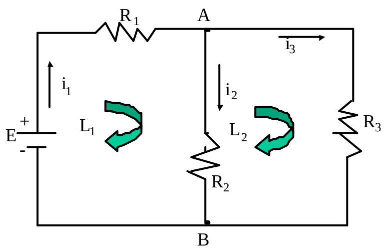
Una aplicación frecuente de estas leyes es cuando se conoce el voltaje de la fuerza electromotriz E (que por lo general es una batería o generador) y los ohmios R_j de las resistencias, y se pide calcular la intensidad i_j de las corrientes, que circulan por cada segmento del circuito.
Obsérvese que para cada elemento en el circuito hay que elegir una dirección positiva para medir la corriente que pasará a través de dicho elemento. Las elecciones se indican con flechas. Para la fuente de voltaje E se toma como positivo el sentido del polo negativo al positivo. Dicha elección condicionará también el signo de los cambios de potencial en las resistencias. El cambio de potencial a través de las resistencias será negativo cuando dicho cambio se mida en el mismo sentido que la corriente, y positivo en el caso contrario.

Ejemplo:

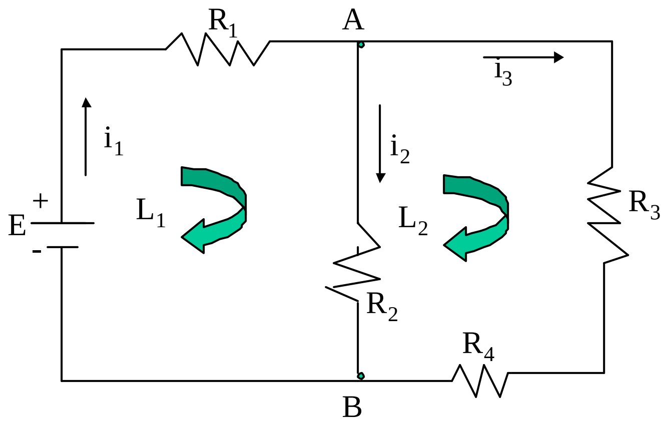
Ejemplo:
En los nodos A y B tenemos:
$i_1 - i_2 - i_3 = 0$

En el bucle L_1 tenemos:
$E - R_1 i_1 - R_2 i_2 = 0$

En el bucle L_2:
$R_2 i_2 - R_3 i_3 = 0$



Problema nº 2.- Calcular las corrientes i_1, i_2, i_3 en el circuito eléctrico de la figura de abajo si el voltaje de la batería es $E = 6$ V y las resistencias son $R_1 = 3\ \Omega$, $R_2 = 5\ \Omega$, $R_3 = 4\ \Omega$, $R_4 = 2\ \Omega$.



Criptografía: El mundo de las telecomunicaciones y las nuevas tecnologías de la información se interesa cada vez más por la transmisión de mensajes encriptados que sean difíciles de desencriptar por otros, en caso de ser interceptados, pero que se decodifiquen con facilidad por quienes los reciben. Hay muchas formas interesantes de cifrar o encriptar mensajes, y en su mayor parte usan la teoría de números o el álgebra lineal. Describiremos aquí un método que es eficaz, en especial cuando se usa una matriz de gran tamaño. En los ejercicios trabajaremos con matrices pequeñas para evitar grandes cálculos manuales.

Comenzaremos con una matriz M invertible, que sólo la conocen quienes trasmiten y quienes reciben. Por ejemplo,

$$M = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Supongamos que se desea encriptar el mensaje:

ATTACK NOW

Reeemplazamos cada letra por el número que le corresponde a su posición en el alfabeto (A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z) y representamos un espacio por 0.

El mensaje anterior se ha convertido en la sucesión de números 1, 20, 20,1, 3, 11, 0, 14, 15, 23, que agrupamos en una sucesión de vectores columna

$$\begin{bmatrix}1\\20\end{bmatrix},\begin{bmatrix}20\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3\\11\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\14\end{bmatrix},\begin{bmatrix}15\\23\end{bmatrix}$$

y multiplicamos por al izquierda a M:

$$M\cdot\begin{bmatrix}1 & 20 & 3 & 0 & 15\\20 & 1 & 11 & 14 & 23\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}77 & -56 & 35 & 56 & 47\\39 & -18 & 19 & 28 & 31\end{bmatrix}.$$

Con lo que el mensaje cifrado que se enviará es 77, 39, -56, -18, 35, 19, 56, 28, 47, 31.

Para desencriptar el mensaje quien lo recibe debe calcular M^{-1},

$$M^{-1}=\begin{bmatrix}-1 & 2\\-1/2 & 3/2\end{bmatrix}$$

y multiplicar por los números recibidos agrupados en una sucesión de vectores columna igual que antes, obtenemos el mensaje original.

$$M^{-1}\cdot\begin{bmatrix}77 & -56 & 35 & 56 & 47\\39 & -18 & 19 & 28 & 31\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 20 & 3 & 0 & 15\\20 & 1 & 11 & 14 & 23\end{bmatrix}$$

Problema nº 3.- Para aquellos alumnos que estén cursando la asignatura de Matemáticas I, les voy a dar un breve pero importante consejo para poder aprobar la asignatura:

1,9,10,22,24,43,16,37,53,24,36,56,16,28,44,37,17,34,21,18,20,25,18,31,1,20,20

Para que este mensaje sea accesible a todos, solamente comentar que el mensaje ha sido encriptado basándose en el método anterior mediante la matriz

$$M=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 1 & 1\\0 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

pero utilizando el alfabeto español (la misma asignación anterior, pero incluyendo nuestra querida Ñ y eliminando la W). Ayuda a tus compañeros y desencripta el mensaje.

Problema nº 4.- Un espía intercepta un mensaje enviado desde una base militar. El mensaje es

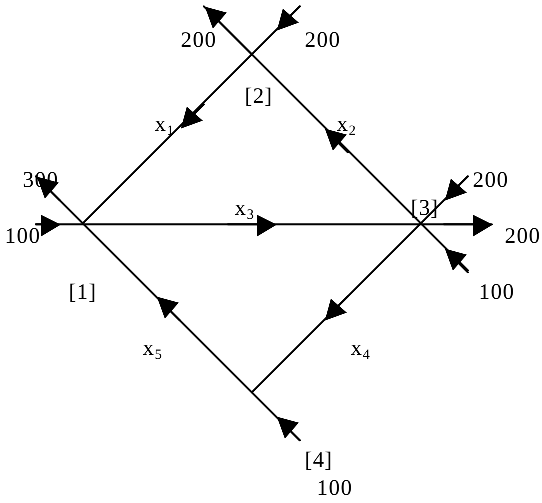
15 81 -9 39 -1 7 2 52 28 56 -12 18 32 100 -2 8 2 4 11 25 12 60 32 64 37 89 -8 26 15 39 32 64 -9 21 4 14

El espía sabe que el mensaje ha sido encriptado con una matriz cuadrada 2×2, utilizando el alfabeto español como en el problema anterior. Además sospecha que al final del mensaje aparecen las siglas de la base: BMCB. Ayuda al espía a desencriptar el mensaje.

<u>Flujos de Tráfico</u>

Problema nº 5.- Considear el siguiente diagrama de una malla de calles de un sentido con vehículos que entran y salen de las intersecciones. La intersección k se denota [k]. Las flechas a lo largo de las calles indican la dirección del flujo de tráfico. Sea x_i = número de vehículos/h que circulan por la calle i. Suponiendo que el tráfico que entra a una intersección también sale, establezca un sistema de ecuaciones que describa el diagrama del flujo de tráfico. Por ejemplo, en la intersección [1]

x_1+x_5+100 = tráfico que entra = tráfico que sale = x_3+300, lo que da $x_1-x_3+x_5=200$.



a) Resuelver el sistema. Habrá un número infinito de soluciones. Escriba las soluciones respecto a las variables que son las naturales para elegirse de manera arbitraria.

b) Suponer que la calle de [1] a [3] necesita cerrarse; es decir, x_3=0. ¿Puede cerrarse también la calle de [1] a [4] (x_5=0) sin cambiar los sentidos del tránsito? Si no se puede cerrar, ¿cuál es la cantidad más pequeña de vehículos que puede admitir esta calle (de [1] a [4])?