Sistemas de Ecuaciones Diferenciales

Sistemas de Ecuaciones Diferenciales

- Sistemas de Ecuaciones Diferenciales
- Ecuaciones Diferenciales de orden m>1
- Métodos numéricos para sistemas
- Teoría cualitativa
  - ✔ Plano de fases
  - ✔ Puntos de equilibrio
  - ✔ Estabilidad

Sistemas de Ecuaciones Diferenciales

$$\left.\begin{aligned} y_1'(t) &= f_1(t, y_1(t), y_2(t), \ldots, y_m(t)) \\ y_2'(t) &= f_2(t, y_1(t), y_2(t), \ldots, y_m(t)) \\ &\vdots \\ y_m'(t) &= f_m(t, y_1(t), y_2(t), \ldots, y_m(t)) \end{aligned}\right\}$$

$$f_i : IR^{m+1} \rightarrow IR, \quad i = 1,2,\ldots m, \quad t \in [a, b]$$

- Condiciones iniciales

$$y_1(a) = y_{10}, y_2(a) = y_{20}, \ldots, y_m(a) = y_{m0}$$

Ecuaciones Diferenciales de orden m >1

$$y^{(m)}(t) = f(t, y(t), y'(t), y''(t), \ldots, y^{(m-1)}(t)), \quad t \in [a, b]$$

- Condiciones iniciales

$$y(a) = y_0, y'(a) = y_0', y''(a) = y_0'', \ldots, y^{(m-1)}(a) = y_0^{(m-1)}$$

- Cambio de variable

$$\begin{aligned} y_1(t) &= y(t) \\ y_2(t) &= y'(t) \\ y_3(t) &= y''(t) \\ &\vdots \\ y_m(t) &= y^{(m-1)}(t) \end{aligned}$$

- Sistema equivalente

$$\left.\begin{aligned} y_1'(t) &= y_2(t) \\ y_2'(t) &= y_3(t) \\ y_3'(t) &= y_4(t) \\ &\vdots \\ y_m'(t) &= f(t, y_1, \ldots y_m) \end{aligned}\right\}$$

Ejemplo: movimiento del péndulo

- Ley de Newton: ecuación de 2º orden

$$l y''(t) + k y' + g \operatorname{sen} y(t) = e(t)$$

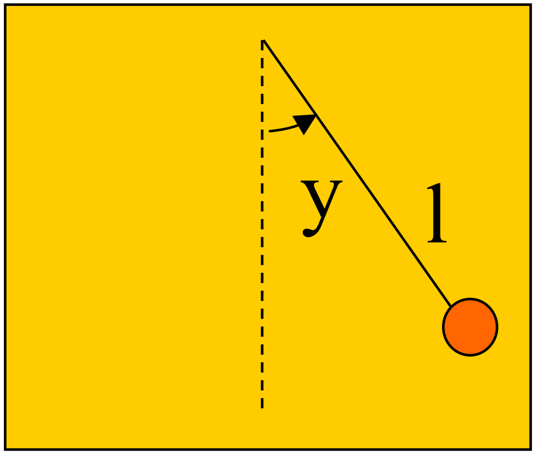
$$y(0) = y_0, \quad y'(0) = w_0$$

- Sistema diferencial de 1er orden

$$\left.\begin{aligned} y'(t) &= w \\ w'(t) &= (e - kw - g \operatorname{sen} y) / l \end{aligned}\right\}$$

Fuerza externa

Resistencia del medio



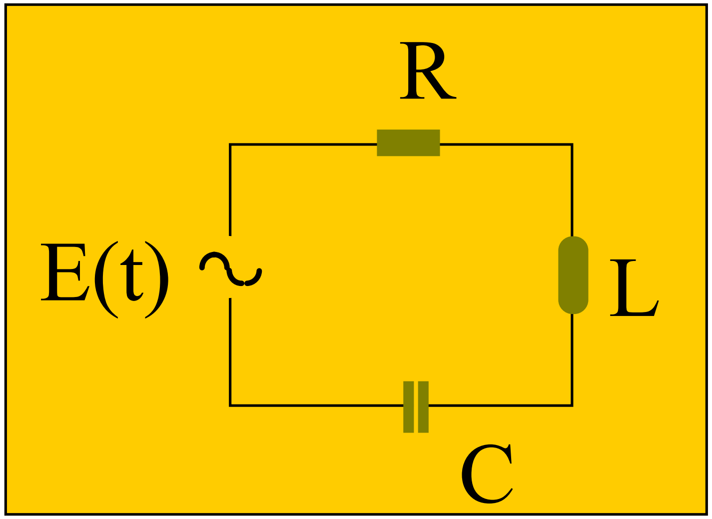
Ejemplo: circuito eléctrico

- Ecuación de 2º orden

$$LQ'' + RQ' + \frac{Q}{C} = E(t), \quad Q(0) = Q_0, \quad I(0) = I_0$$

- Sistema diferencial de 1er orden

$$\left.\begin{aligned} Q' &= I \\ I' &= -\frac{1}{LC}Q - \frac{R}{L}I + \frac{E(t)}{L} \end{aligned}\right\}$$



Expresión matricial del S.E.D.

- Problema de valor inicial

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)) \quad , \quad t \in [a, b] \quad , \quad \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0$$

siendo,

$$\mathbf{y}(t) = (y_1(t), y_2(t), \ldots, y_m(t))^{\mathsf{T}}$$

$$\mathbf{y}'(t) = (y_1'(t), y_2'(t), \ldots, y_m'(t))^{\mathsf{T}}$$

$$\mathbf{f}(t, \mathbf{y}) = (f_1(t, \mathbf{y}), f_2(t, \mathbf{y}), \ldots, f_m(t, \mathbf{y}))^{\mathsf{T}}$$

$$\mathbf{y}_0 = (y_{01}, y_{02}, \ldots, y_{0m})^{\mathsf{T}}$$

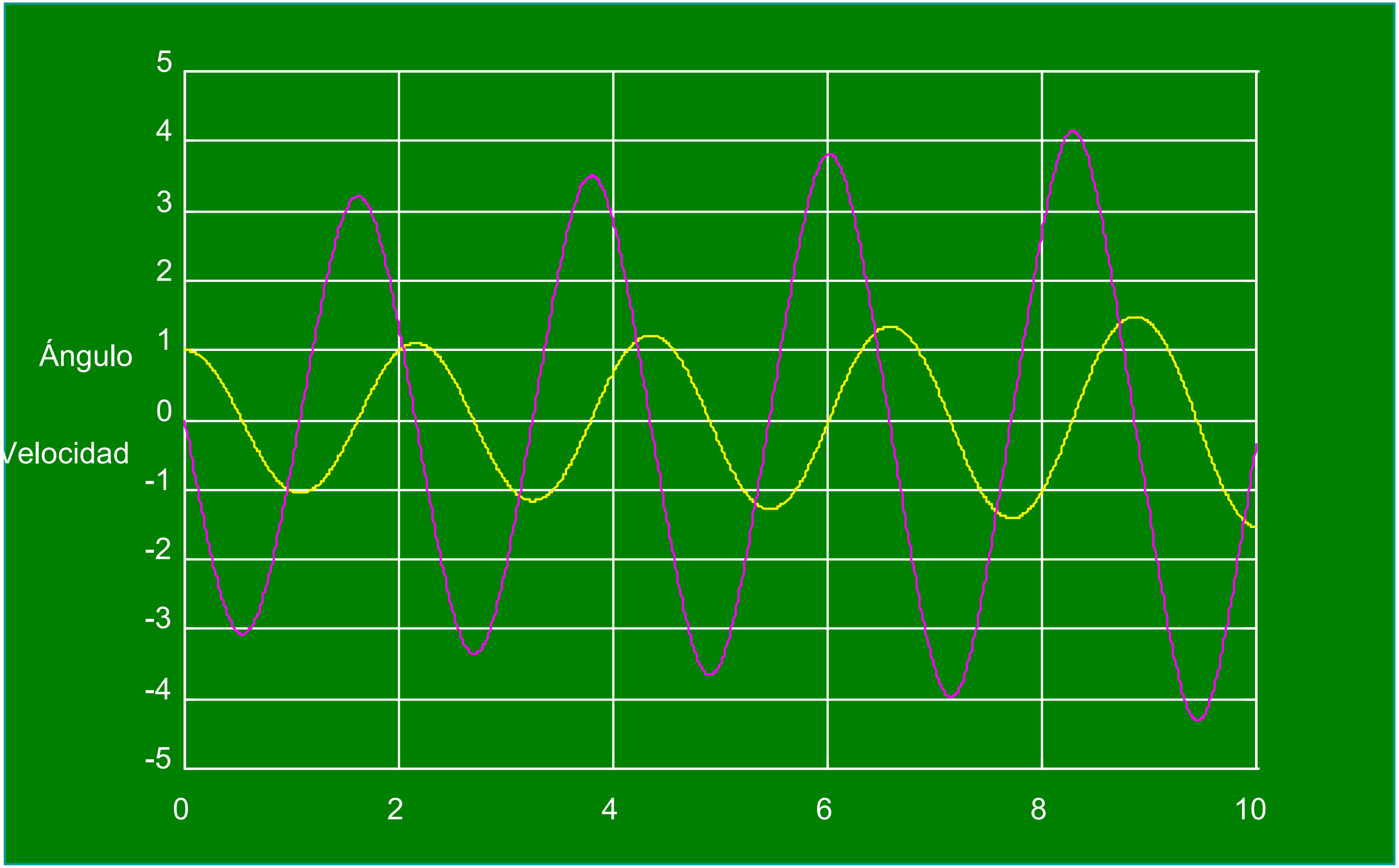
Métodos numéricos para sistemas

```
function [t,y]=mieuler(a,b,y0,n)
m=length(y0);
h=(b-a)/n; t=a:h:b;
y=zeros(n+1,m); y(1,:)=y0;
for k=1:n
    y(k+1,:)=y(k,:)+h*f(t(k),y(k,:));
end
```

Ecuación del péndulo

```
function z=pendulo(t,y)
% z=pendulo(t,y)
%      ly"+ky'+g·sen(y) = e(t)
% l: longitud, k: resistencia del medio
% g: acel. grav., e(t): fuerza externa
l=1; k=0; g=9.81; e=0;          % Datos
z(1)=y(2);                      % Ecuación
z(2)=(e - k*y(2) - g*sin(y(1)))/l;
```

Péndulo simple no amortiguado!!



Teoría cualitativa

- Sistema de 2 ecuaciones diferenciales

$$\left.\begin{aligned} x' &= f(t,x,y) \\ y' &= g(t,x,y) \end{aligned}\right\}$$

- Sistema autónomo

$$\left.\begin{aligned} x' &= f(x,y) \\ y' &= g(x,y) \end{aligned}\right\}$$

- Puntos de equilibrio

$$\left.\begin{aligned} f(x,y) &= 0 \\ g(x,y) &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Plano de fases

- Trayectorias u órbitas

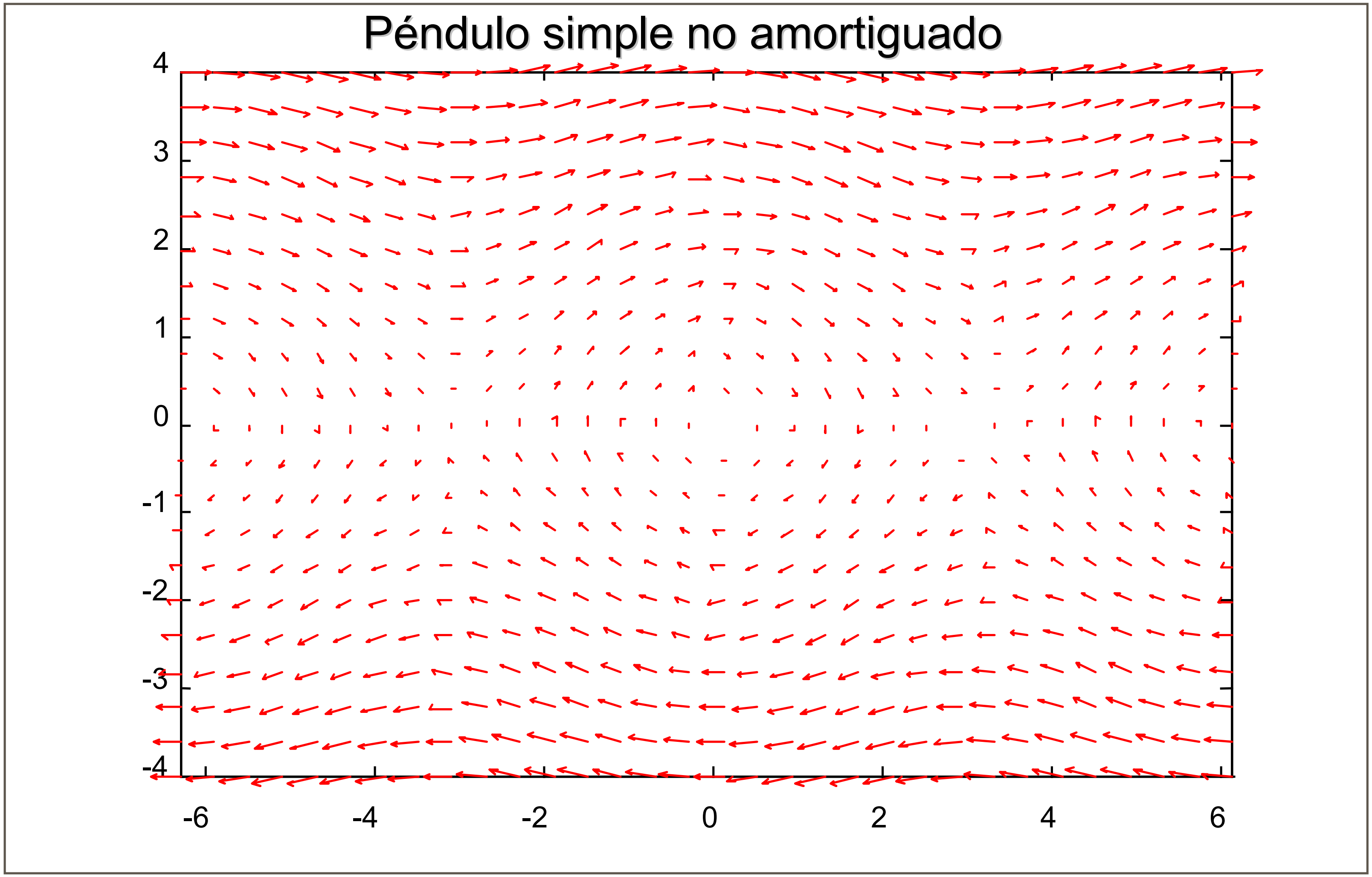
$$(x(t), y(t)), \quad t \in [t_0, \infty]$$

- Propiedades
  - Unicidad
  - Trayectorias punto de equilibrio
  - Comportamiento asintótico
  - Órbitas cerradas

Plano de fases

- `x=a:h:b; y=c:h:d;`
- `[xx,yy] = meshgrid(x,y);`
- `dx = f(xx,yy);`
- `dy = g(xx,yy);`
- `quiver(xx,yy,dx,dy)`

Plano de fases

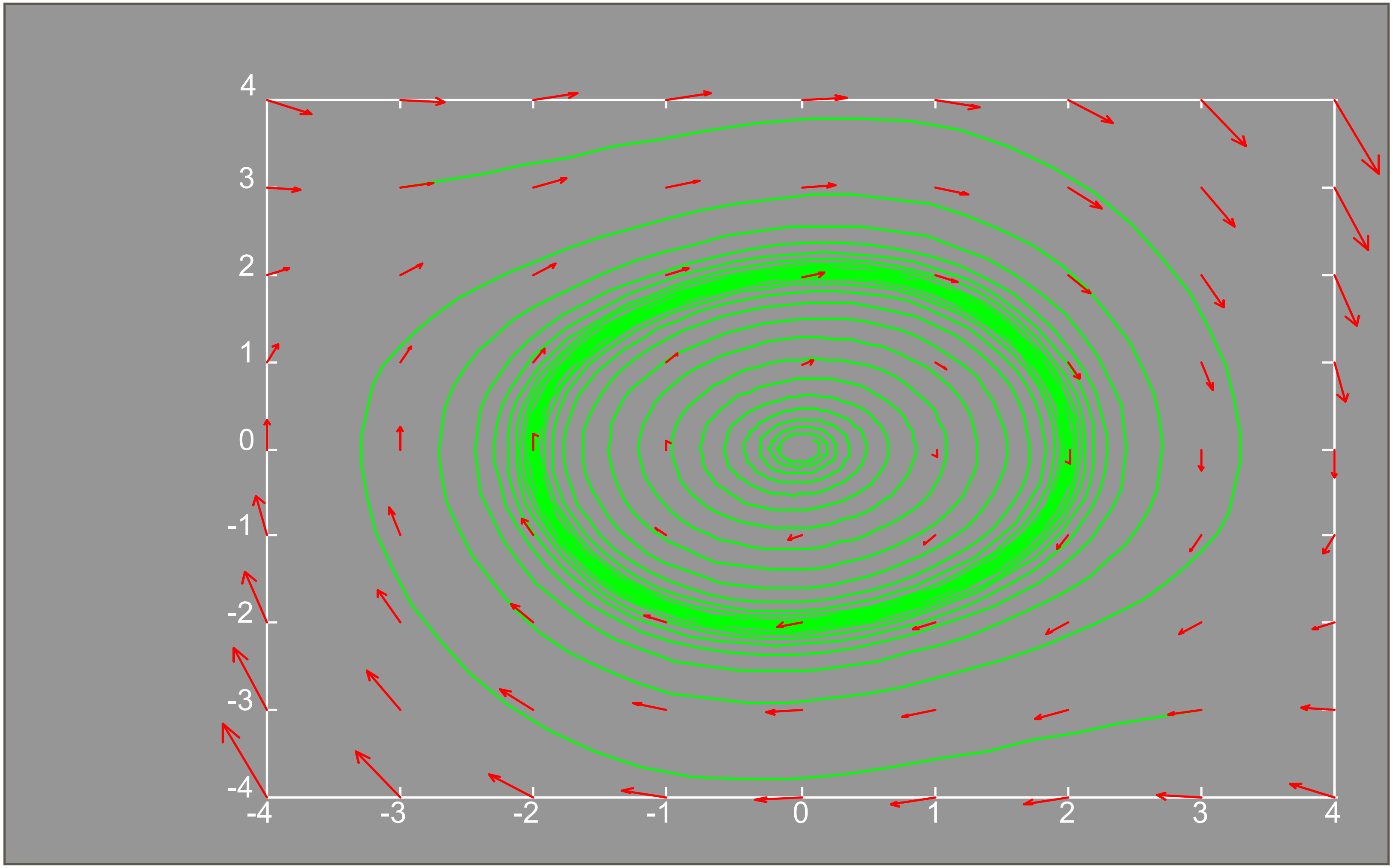


Ecuación de van der Pol

- Ecuación 2º orden $y'' + k(y^2 - 1)y' + y = 0$
- Cambio $y_1 = y, \quad y_2 = y'$
- Sistema 1er orden $$\left.\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= k(1 - y^2)y_2 - y_1 \end{aligned}\right\}$$

```
function z=vanderPol(t,y)
k=0.1;
    z(1)=y(2);
    z(2)=k*(1-y(1).^2).*y(2)-y(1);
```

Ecuación de van der Pol



Estabilidad

- Las trayectorias próximas en un instante dado, permanecen siempre próximas.
- Las trayectorias próximas en un instante dado, no lo están posteriormente.
- Las trayectorias próximas en un instante dado, están cada vez más próximas.