



EJERCICIOS DE EXÁMENES

TODAS LAS RESPUESTAS TIENEN QUE ESTAR DEBIDAMENTE EXPLICADAS Y JUSTIFICADAS.

1.- Responder a las siguientes cuestiones:

- En la siguiente suma $\Sigma = 1'761 + 17'32 - 5'782$ todas las cantidades están redondeadas. Determinar cotas de los errores absoluto y relativo propagados al efectuar la suma.
- La aproximación $e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2}$ se usa cuando x está próximo a 0. Usando el teorema de Taylor estima el error cometido al realizar esta aproximación cuando $|x| < 0'1$.
- Sabiendo que una cierta ecuación continua en una variable tiene una única raíz entre 1'55 y 1'75, ¿cuántas iteraciones son necesarias para aproximarse a dicha raíz, mediante el método de la bisección, con un error menor que 0'0001?
- Decidir si $\frac{1}{n \log n} = O\left(\frac{1}{n}\right)$.
- Explica algún método iterativo para aproximar el valor de $\sqrt[3]{16}$.
- Determinar el número de raíces reales negativas del polinomio
$$P(x) = 2x^5 - 20x^4 + 37x^3 - 38x^2 + 33x - 18$$

¿Tiene $P(x)$ alguna raíz positiva?

2.- Elegir entre las 3 opciones la que sea correcta, indicando porqué se descartan las otras y qué resultado o resultados se han utilizado en cada caso.

- El polinomio $x^4 + x^3 - x^2 + x - 1$
 - tiene 3 raíces reales positivas.
 - no tiene raíces reales.
 - tiene 1 raíz real negativa.
- Se quiere aproximar una raíz de la ecuación $x^3 + 4x^2 - 10 = 0$, que sabemos se encuentra en el intervalo (1,2), mediante el método del punto fijo. ¿Cuál de las siguientes funciones utilizarías para poder esperar convergencia en el proceso de iteración?
 - $f(x) = \frac{1}{2} \sqrt{10 - x^3}$.
 - $g(x) = x - x^3 - 4x^2 + 10$.
 - $h(x) = \sqrt{\frac{10}{4 + x}}$

3.- La ecuación de Kepler tiene la siguiente expresión:

$$a = x - e \cdot \operatorname{sen} x, \text{ con } 0 < e < 1$$

- Demostrar que para cada $a \in [0, p]$ existe un x verificando la ecuación.



b) Interpretar este problema como un problema de punto fijo y encontrar un intervalo en el que la iteración del punto fijo converja.

4.- Considérese el polinomio $f(x) = x^3 - x - 1$. Se pide:

- Determinar el número de raíces reales de f y verificar que posee una única raíz positiva.
- Encontrar un intervalo de longitud 1 que aisle la raíz positiva y verificar que la iteración de Newton converge en dicho intervalo.
- Aproximar dicha raíz positiva mediante el método de Newton, utilizando en los cálculos 4 decimales redondeados iterando hasta que $|x_n - x_{n-1}| \leq 0.1 \cdot 10^{-2}$.

5.- Sea $f(x) = 3x^2 - e^x$. Se pide:

- Encontrar un intervalo que contenga la menor raíz positiva de $f(x)$.
- Encontrar una función de punto fijo $g(x)$ y un intervalo $[a,b]$ de modo que la iteración del punto fijo converja a una raíz de $f(x)$ para cualquier estimación inicial en el intervalo $[a,b]$.
- Aproximar por el método del punto fijo dicha raíz iterando hasta que $|x_n - x_{n-1}| \leq 0.1 \cdot 10^{-2}$. ¿Observas convergencia oscilante?

6.- Dado el polinomio $P(x) = x^3 + 4x^2 - 10$

- Calcular el número de raíces distintas que tiene en el intervalo $[1,2]$
- Comprobar que el método del punto fijo va a converger a una raíz de $P(x)$ en $[1,2]$ usando la función de iteración $g(x) = \left(\frac{10}{4+x}\right)^{1/2}$
- Trabajando con redondeo a 3 decimales y usando la función del apartado b), realizar 3 iteraciones del método del punto fijo para aproximar la raíz anterior.

7.- Considere el siguiente archivo de función MatLab pqr.m. Se pide:

- Añadir en cada línea, a continuación del %, la descripción de la operación que se está ejecutando.
- Las variables de entrada p y a son:
 - p y a son números reales
 - p es un número real y a es un vector
 - p es un vector y a es un número real
 - p y a son vectores

```
function y = pqr(p, a) %  
n=size(p,2); %  
q(n-1) = p(n); %  
for k=(n-2):(-1):1 %  
q(k) = p(k+1)+a*q(k+1); %  
end; %  
y=p(1)+a*q(1) %
```

8.- Elegir entre las 3 opciones la que sea correcta, indicando porqué se descartan las otras dos.

- En el recuadro aparece un archivo Matlab de función



```
function z=fun(t,y)
z=[t-7*(y(1))-4*(y(4)), -13*(y(1))-2*y(2)-y(3), 6*t*y(1)+y(2)+4*y(4)];
```

- 1.- Al ejecutar el archivo `fun.m` Matlab devuelve un vector con 3 componentes.
- 2.- `fun` admite como datos de entrada dos números reales t, y .
- 3.- El archivo `fun.m` almacena una función de \mathbf{R}^2 en \mathbf{R}^3 .

- 9.- Elegir entre las 3 opciones la que sea correcta, indicando porqué se descartan las otras dos:
En el recuadro aparece un archivo Matlab de función `rema.m`

```
function y = rema(p, a)
n=size(p,2);
q(n-1) = p(n);
for k=(n-2):(-1):1
q(k) = p(k+1)+a*q(k+1);
end;
```

- 1.- La función `rema` admite como variables de entrada dos vectores p y a de la misma dimensión.
- 2.- Al ejecutar el archivo `rema.m` obtenemos como salida un número real.
- 3.- Al ejecutar el archivo `rema.m` obtenemos como salida un vector de dimensión n .