SUPERFICIES EN EL ESPACIO

1. Expresiones de una superficie en coordenadas cartesianas y ejemplos:

Una *superficie* S en el espacio es la imagen de una aplicación continua $r : D \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$, es decir, es el conjunto de puntos

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : (x, y, z) = r(u, v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \text{ con } (u, v) \in D\} .$$

Así, una superficie puede expresarse mediante:

- Ecuaciones paramétricas de S: $\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) , \quad (u,v) \in D \\ z = z(u,v) \end{cases}$

  Los parámetros u, v reciben el nombre de *coordenadas curvilíneas* de la superficie.
- Ecuación explícita de S es aquella en que los parámetros son dos de las variables, luego una ecuación explícita es $z = f(x, y)$ ó $y = f(x, z)$ ó $x = f(y, z)$
- Ecuación implícita de S es aquella que nos da una relación entre las variables x, y, z de la forma $F(x, y, z) = 0$.

Ejemplos:

1) El plano coordenado xy de $\mathbf{R}^3$ es imagen de la aplicación $r : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$, $r(u,v) = (u,v,0)$. Las ecuaciones paramétricas son $x = u,\ y = v,\ z = 0$; con $u,v \in \mathbf{R}$ y la ecuación implícita es $z = 0$.
2) La esfera unidad de $\mathbf{R}^3$ es imagen de al aplicación

$$r : \left[-\frac{p}{2}, \frac{p}{2}\right] \times [0,2p] \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3,\ r(u,v) = (\cos u \cos v, \cos u \operatorname{sen} v, \operatorname{sen} u)$$

Unas ecuaciones paramétricas de la esfera son

$$x = \cos u \cos v,\ y = \cos u \operatorname{sen} v,\ z = \operatorname{sen} u;\ \text{con } -\frac{p}{2} \le u \le \frac{p}{2},\ 0 \le v \le 2p$$

y la ecuación implícita es $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

2. Más ejemplos de superficies

2.1. Cuádricas

La esfera (véase figura 9.1) de ecuación implícita $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, para $a > 0$, admite como ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x = a \cos u \cos v \\ y = a \cos u \operatorname{sen} v \\ z = a \operatorname{sen} u \end{cases} \qquad \begin{array}{l} -\dfrac{\pi}{2} \le u \le \dfrac{\pi}{2} \\ 0 \le v < 2\pi. \end{array}$$

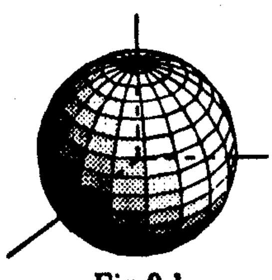

Fig 9.1

El **elipsoide** (véase figura 9.2) de ecuación implícita $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, para $a,b,c>0$, admite como ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x = a\cos u \cos v \\ y = b\cos u \operatorname{sen} v \\ z = c\operatorname{sen} u \end{cases} \qquad \begin{array}{l} -\frac{\pi}{2}\leq u \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq v < 2\pi. \end{array}$$

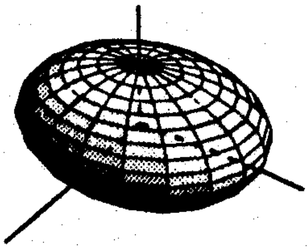

Fig 9.2

Nótese que la esfera es un caso particular de elipsoide cuando $a=b=c$.

La ecuación explícita del **paraboloide elíptico** (véase figura 9.3) es $z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$, para $a,b>0$. Cortando dicha superficie por planos $z=$ cte. se obtienen elipses. Unas posibles ecuaciones paramétricas son

$$\begin{cases} x = au\cos v \\ y = bu\operatorname{sen} v \\ z = u^2 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} 0\leq u < \infty \\ 0 \leq v < 2\pi. \end{array}$$

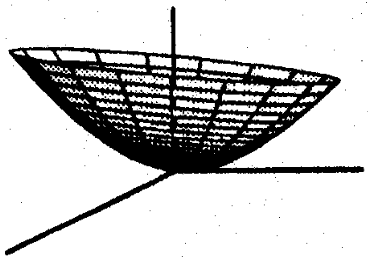

Fig 9.3

Si $a=b$ el paraboloide se denomina circular.

NOTA: *Un paraboloide circular puede obtenerse como superficie de traslación como se verá posteriormente.*

La ecuación $z=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$, para $a,b>0$, es la ecuación explícita de un **paraboloide hiperbólico** (véase figura 9.4). La intersección de esta superficie con planos $z=$ cte. son hipérbolas. Unas posibles ecuaciones paramétricas son

$$\begin{cases} x = au \\ y = bv \\ z = u^2 - v^2 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} -\infty < u < \infty \\ -\infty < v < \infty. \end{array}$$

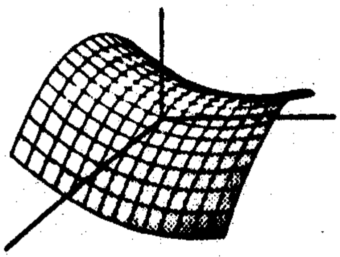

Fig 9.4

La ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$, para $a, b, c > 0$ es la ecuación implícita del **hiperboloide de una hoja** (véase figura 9.5). Unas posibles ecuaciones paramétricas son

$$\begin{cases} x = a\cosh u \cos v \\ y = b\cosh u \operatorname{sen} v \\ z = c \operatorname{senh} u \end{cases} \qquad \begin{array}{l} -\infty < u < \infty \\ 0 \le v < 2\pi. \end{array}$$

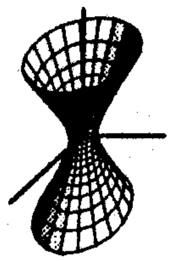

Fig 9.5

La ecuación $\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, para $a, b, c > 0$ es la ecuación implícita del **hiperboloide de dos hojas** (véase figura 9.6). Unas posibles ecuaciones paramétricas de la primera hoja son

$$\begin{cases} x = a \operatorname{senh} u \cos v \\ y = b \operatorname{senh} u \operatorname{sen} v \\ z = c\cosh u \end{cases} \qquad \begin{array}{l} 0 \le u < \infty \\ 0 \le v < 2\pi. \end{array}$$

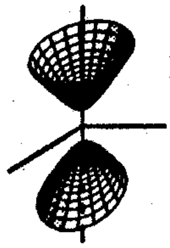

Fig 9.6

y unas posibles ecuaciones paramétricas de la segunda hoja son

$$\begin{cases} x = a \operatorname{senh} u \cos v \\ y = b \operatorname{senh} u \operatorname{sen} v \\ z = -c\cos u \end{cases} \qquad \begin{array}{l} 0 \le u < \infty \\ 0 \le v < 2\pi \end{array}$$

La ecuación implícita $x^2 + y^2 = a^2$, para $a > 0$, representa un **cilindro** de base circular con generatrices paralelas al eje OZ (véase figura 9.7). Unas posibles ecuaciones paramétricas son

$$\begin{cases} x = a\cos v \\ y = a \operatorname{sen} v \\ z = u \end{cases} \qquad \begin{array}{l} -\infty < u < \infty \\ 0 \le v < 2\pi. \end{array}$$

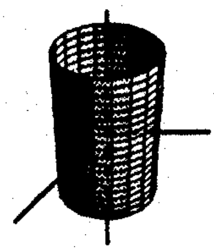

Fig 9.7

Un **cono circular** de vértice el origen (véase figura 9.8) puede expresarse en forma implícita como $x^2 + y^2 - a^2z^2 = 0$, para $a > 0$. Unas posibles ecuaciones paramétricas son

$$\begin{cases} x = au\cos v \\ y = au \operatorname{sen} v \\ z = u \end{cases} \qquad \begin{array}{l} -\infty < u < \infty \\ 0 \le v < 2\pi. \end{array}$$

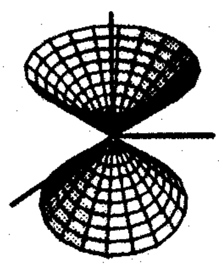

Fig 9.8

2.2. Superficies de revolución

Una *superficie de revolución S* es una superficie que se obtiene haciendo girar una curva *G* en torno a una recta *E* que llamaremos eje de la superficie. Por ejemplo un cilindro es la superficie de revolución que se obtiene girando una recta alrededor de otra.

En lo que sigue supondremos que la curva *G* no tiene puntos múltiples y que no corta al eje *E*.

Cada punto de al curva *G* describe, al girar, una circunferencia contenida en un plano perpendicular al eje de giro que llamaremos *paralelo*. Las curvas que se obtienen al cortar la superficie de revolución por planos que contienen al eje se llaman *meridianos*.

Para obtener las ecuaciones de una superficie de revolución, conocidos el eje E y la curva *G*, supongamos que E viene descrito por un punto $P = (x_0, y_0, z_0)$ y un vector director $v = (v_1, v_2, v_3)$, y que *G* está dado por las ecuaciones implícitas $f_1(x,y,z) = 0$, $f_2(x,y,z) = 0$. Podemos considerar que un punto (x,y,z) de la superficie de revolución *S* está sobre una circunferencias en un plano perpendicular a *E* cuyo centro está en *E* y además $(x,y,z) \in G$. Sea entonces (x_0, y_0, z_0) el centro de esta circunferencia el punto (x,y,z) cumple:

$$\begin{cases} (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = R^2 \\ v_1 x + v_2 y + v_3 z = l \\ f_1(x,y,z) = 0 \\ f_2(x,y,z) = 0 \end{cases}$$

2.3. Superficies de traslación

Una *superficie de traslación* es una superficie *S* que se obtiene al trasladar una curva Γ_2 paralelamente a si misma cuando un punto suyo P_0 sigue la traza de otra curva Γ_1. Diremos que *S* es la superficie de traslación que tiene por *directriz* la curva Γ_1 y por *generatriz* la curva Γ_2.

Luego, si

$$\begin{gathered} \Gamma_1 : c(u) = (x(u), y(u), z(u)) \\ \Gamma_2 : c^*(v) = (x^*(v), y^*(v), z^*(v)) \\ P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \Gamma_1 \cap \Gamma_2 \end{gathered}$$

las ecuaciones paramétricas de S son:

$$\begin{cases} x = x(u) + x^*(v) - x_0 \\ y = y(u) + y^*(v) - y_0 \\ z = z(u) + z^*(v) - z_0 \end{cases}$$