Teoremas de la función implícita

Problema: Dadas r ecuaciones con n incógnitas ($r \leq n$), estudiar si se puede encontrar una solución paramétrica que dependa de $n - r$ incógnitas; es decir, saber si podemos despejar r incógnitas en función de las otras $n - r$.

Un caso particular de este problema son los sistemas de r ecuaciones lineales con n incógnitas y el teorema de Rouché nos da la respuesta al problema planteado.

Ahora nos planteamos una situación más general: las ecuaciones vienen dadas por funciones continuas, es decir, tenemos un sistema de ecuciones

$$\begin{cases} F_1(x_1, \ldots, x_n) = 0 \\ \quad\vdots \\ F_r(x_1, \ldots, x_n) = 0 \end{cases}$$

donde $F_1, \ldots, F_r : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ son funciones continuas.

A continuación veremos la respuesta para los dos casos que surgen con 3 incognitas:

➢ Despejamos una incógnita en una ecuación

Teorema de la función implícita (1ª versión para 3 variables): Sea $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ una función continua con derivadas parciales continuas y supongamos que para $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbf{R}^3$ se tiene

$$F(x_0, y_0, z_0) = 0 \ \text{ y } \ \frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$$

Entonces existe un disco U entorno del punto (x_0, y_0) y un intervalo V que contiene a z_0 de modo que existe una única función $g : U \to V$ tal que

$$F(x, y, g(x, y)) = 0 \quad \text{para todo} \quad (x, y) \in U .$$

Observaciones: 1) Este teorema tiene una generalización para una función $F : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$.

2) Interpretación geométrica: el teorema nos da un criterio local (en un entorno de un punto) para saber cuando una superficie en el espacio, dada por $F(x, y, z) = 0$, es un trozo de la gráfica de una función $g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$.

➢ Despejamos dos incógnitas en dos ecuaciones

Teorema de la función implícita (2ª versión para 3 variables): Sean $F_1, F_2 : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ una función continua con derivadas parciales continuas y supongamos que para $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbf{R}^3$ se tiene

$$\begin{cases} F_1(x_0, y_0, z_0) = 0 \\ F_2(x_0, y_0, z_0) = 0 \end{cases} \ \text{ y } \ \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) & \dfrac{\partial F_1}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) & \dfrac{\partial F_2}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \end{vmatrix} \neq 0$$

Entonces existe un intervalo U entorno al punto x_0 y un entorno V de (y_0, z_0) de modo que existen únicas funciones $g_1, g_2 : U \to V$ tal que

$$F_1(x, g_1(x), g_2(x)) = 0,\ F_2(x, g_1(x), g_2(x)) = 0 \quad \text{para todo} \quad x \in U .$$