SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

1.- Expresar en forma de sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden las siguientes ecuaciones:

$$(i)\ \frac{d^2y}{dx^2}=2x \qquad (ii)\ \frac{d^2y}{dx^2}=2y^3+xy' \qquad (iii)\ x^2y''-4xy'-8y=0$$

2.- Comprobar que el vector $Y=\begin{pmatrix} 5e^x\cos x \\ e^x(3\cos x-\operatorname{sen} x)\end{pmatrix}$ es solución del sistema de ecuaciones diferenciales $\begin{cases} y_1'=-2y_1+5y_2 \\ y_2'=-2y_1+4y_2 \end{cases}$.

3.- Obténgase la solución de los siguientes sistemas, teniendo en cuenta que se puede despejar una de las variables en una ecuación y sustituirla en la otra:

$$a)\begin{cases} y_1'=2y_1-y_2 \\ y_2'=y_1 \end{cases} \qquad b)\begin{cases} y_1'=xy_1+\operatorname{sen} x\, y_2 & ;\ y_1(0)=1 \\ y_2'=\cos x\, y_2 & ;\ y_2(0)=0 \end{cases}$$

4.- Encontrar la solución general de los siguientes sistemas de ecuaciones diferenciales:

$$a)\begin{cases} y_1'=-3y_1+4y_2 \\ y_2'=-2y_1+3y_2 \end{cases} \qquad b)\begin{cases} y_1'=2y_1 \\ y_2'=3y_2 \end{cases} \qquad c)\begin{cases} y_1'=4y_1-2y_2 \\ y_2'=5y_1+2y_2 \end{cases}$$

$$d)\begin{cases} y_1'=-4y_1-y_2 \\ y_2'=y_1-2y_2 \end{cases} \qquad e)\begin{cases} y_1'=4y_1-3y_2 \\ y_2'=8y_1-6y_2 \end{cases} \qquad f)\begin{cases} y_1'=7y_1+6y_2 \\ y_2'=2y_1+6y_2 \end{cases}$$

5.- Demostrar que la solución general de un sistema lineal no homogéneo $Y'=A(x)Y+G(x)$ se obtiene sumando a una solución particular de ésta, la solución general del sistema homogéneo asociado $Y'=A(x)Y$.

6.- (*Método de variación de las constantes*). Para encontrar una solución particular de un sistema lineal no homogéneo, podemos aplicar un método de variación de las constantes análogo al que usábamos para ecuaciones lineales.

a) Sea el sistema lineal $Y'=AY+G(x)$ donde A es una matriz real cuadrada, entonces la solución general del sistema homogéneo $Y'=AY$ asociado es $Y=e^{Ax}C$, siendo C un vector columna constante. Comprobar que $Y=e^{Ax}C(x)$ es solución del sistema $Y'=AY+G(x)$ cuando el vector de funciones $C(x)$ verifica $C'(x)=e^{-Ax}G(x)$.

b) Aplicar el método anterior para encontrar una solución particular del sistema

$$\begin{cases} y_1'=y_1+y_2+2 \\ y_2'=4y_1-2y_2-8 \end{cases}$$

y dar la solución general usando el problema 5.