ECUACIONES DIFERENCIALES DE ORDEN SUPERIOR

1.- Obtener la solución general o particular, según cada caso, de las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$(i)\ \frac{d^2y}{dx^2} = 2x \qquad (ii)\ \frac{d^2y}{dx^2} = 2y^3 \quad y(0)=1 \quad y'(0)=1$$

$$(iii)\ y''+2y'-8y=0 \quad y(0)=5 \quad y'(0)=-2$$

2.- Demuéstrese que $y = x^2 \operatorname{sen} x$ e $y = 0$ son soluciones de la ecuación diferencial

$$x^2y''-4xy'+(x^2+6)y=0$$

y que ambas satisfacen las condiciones $y(0)=0$ $y'(0)=0$. ¿Contradice esto el teorema de existencia y unicidad de soluciones de un problema de valor inicial dado por una ecuación diferencial lineal de segundo orden? ¿Por qué?

3.- Comprobar que las siguientes familias biparamétricas de funciones son la solución general de la ecuación lineal correspondiente e indicar en qué intervalo:

a) $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$; $y''-y=0$

b) $y = c_1 x + c_2$; $x^2y''-2xy'+2y=0$

4.- Comprobar que la función dada en cada caso es una solución particular de la ecuación diferencial y encontrar la solución general:

a) $y = x$; $(1-x^2)y''-2xy'+2y=0$

(esta ecuación es un caso particular de la ecuación de Legendre $(1-x^2)y''-2xy'+p(p+1)y=0$ para $p=1$)

b) $y = e^x$; $xy''-(2x+1)y'+(x+1)y=0$

5.- Encontrar la solución general de las ecuaciones lineales siguientes:

$(i)\ 3y''-2y'-8y=0 \quad (ii)\ y''+2y'+y=0 \quad (iii)\ y'''-8y=0 \quad (iv)\ y''+8y=0$

$(v)\ y''-2y'+5y=25x^2+12 \quad (vi)\ y''-2y'+2y=e^x\cos x \quad (vii)\ y''+4y=\operatorname{tang} 2x$

6.- Se lanza una pelota hacia arriba, describiendo una trayectoria parabólica, con una velocidad inicial de 39'2 m/sg. ¿Cuál será su posición al cabo de 2 sg.? ¿Cuál será la altura máxima que alcanza?

7.- La ecuación

$$x^2y''+pxy'+qy=0$$

(en donde p y q son constantes) se denomina *ecuación equidimensional de Cauchy-Euler*. Demuéstrese que el cambio de variable $x = e^t$ la transforma en una ecuación de coeficientes constantes, y aplíquese esta técnica para encontrar la solución general de la ecuación:

$$x^2y''+3xy'+10y=0.$$

8.- (*Principio de superposición*) Si $y_1(x)$ e $y_2(x)$ son soluciones de $y''+P(x)y'+Q(x)y = g_1(x)$ y de $y''+P(x)y'+Q(x)y = g_2(x)$ respectivamente. Probar que $y_1(x)+y_2(x)$ es solución de $y''+P(x)y'+Q(x)y = g_1(x)+ g_2(x)$.

9.- Usar el problema anterior para resolver la ecuación

$$y''+4y = 4\cos 2x + 6\cos x + 8x^2 - 4x$$

10.- resolver mediante el método de los coeficientes indeterminados las siguientes ecuaciones lineales:

$$a)\, y''+3y = e^{3x} \quad b)\, y''+9y = 2\cos 3x + 3\operatorname{sen} 3x \quad c)\, y''+2y'+5y = e^{x}\operatorname{sen} x$$

$$d)\, y''+y = \operatorname{sen} x + x\cos x \quad e)\, y''+2y'-3y = 1 + e^{x}$$

11.- Usando identidades trigonométricas, resolver por el método de los coeficientes indeterminados la siguiente ecuación diferencial

$$y''+y'+y = \operatorname{sen}^2 x$$

12.- Si k y b son constantes positivas, hallar la solución general de la ecuación

$$y''+k^2 y = \operatorname{sen} bx$$