CONCEPTOS BÁSICOS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

1.-Indicar el orden y el grado de las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$a)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \operatorname{sen} x+3xy\frac{dy}{dx}+y^2e^x=0; \qquad b)\ \left(\frac{dy}{dx}\right)^2=3x\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^3;$$

$$c)\ \frac{d^2y}{dx^2}+5x^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^3+6y=0$$

2.- Seleccionar entre las siguientes ecuaciones las que son lineales

$$a)\ \frac{dy}{dx}+x^2-1=0; \qquad b)\ dy=\left(x^2-y^2\right)dx; \qquad c)\ ydx+\left(xy+x-3y\right)dy=0;$$

$$d)\left(2+y^2\right)dx-\left(xy+2y+y^3\right)dy=0; \qquad e)\ 2x\frac{d^3y}{dx^3}+\left(3x^2-1\right)\frac{d^2y}{dx^2}=\operatorname{sen} x$$

3.- Demostrar que cada una de las funciones definidas es solución de la correspondiente ecuación diferencial.

a) $f(x)=x+e^{-x}$ para la ecuación $y'+y=x+1$.

b) $f(x)=2e^{3x}-5e^{4x}$ para la ecuación $y''-7y'+12y=0$.

c) $v(t)=\operatorname{sen} t+\cos t$ para la ecuación $v'\cos t+v\operatorname{sen} t=1$.

d) $f(x)=e^x\left(2x+1\right)$ para la ecuación $y''=2y'-y$.

4.- Demostrar que la familia de funciones indicada satisface la ecuación diferencial correspondiente:

a) $y=C_1e^{5x}+C_2e^{-x}$ para la ecuación $\dfrac{d^2y}{dx^2}-2\dfrac{dy}{dx}-8y=0$

b) $y=C_1x+\dfrac{C_2}{x}+C_3$ para la ecuación $y'''+3\dfrac{y''}{x}=0$.

5.- Determinar los valores de *m* para los que $f(x)=e^{mx}$ es solución de $y'''+3y''-4y'+2y=0$.

6.- Determinar en qué región debe estar el valor inicial (x_0, y_0) para que las siguientes ecuaciones diferenciales admitan solución única:

$$a)\ y'=\operatorname{tg}(y); \quad b)\ y'=x^2\operatorname{sen} y; \qquad c)\ y'-\sqrt{y-x}=0;$$

$$d)\ y'=1-\cot gy; \qquad e)\ y'=\frac{y-1}{x^2+x+1}; \qquad f)\ y'=\sqrt{x^2-y}$$

7.- Un barco ve frenado su movimiento por la acción de al resistencia del agua que es proporcional a la velocidad del barco. Escribir la ecuación que expresa la velocidad del barco.

8.- Una curva se eleva desde el origen en el plano xy dentro del primer cuadrante. El área del recinto que determina esta curva y el eje 0x desde el punto (0,0) hasta el (x,y) es un tercio del área del rectángulo de vértices (0,0), (x,0), (0,y), (x,y). Hallar la ecuación de la curva.

9.- a) Calcular la ecuación diferencial asociada a la familia de rectas $2y + 3x - C = 0$.

b) Calcular la ecuación diferencial asociada a la familia de elipses $x^2 - y^2 = ax$.

c) Calcular la ecuación diferencial asociada a la familia de curvas $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$.

d) Calcular la ecuación diferencial asociada a la familia de curvas $y = e^x (ax + b)$.

10.- Explicar por qué la ecuación diferencial $\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 = \frac{4 - y^2}{4 - x^2}$ no tiene soluciones reales cuando |x|<2, |y|>2. ¿Hay otras regiones del plano xy donde la ecuación no tenga soluciones?

11.- Una medicina se inyecta en el torrente sanguíneo de un paciente con un flujo constante de r gramos por segundo. Al mismo tiempo, esa medicina desaparece con una razón proporcional a la cantidad $x(t)$ presente en la sangre en cualquier momento t. Formular una ecuación diferencial que describa la función $x(t)$.