GEOMETRIA DIFERENCIAL DE SUPERFICIES

1.- Dar unas ecuaciones paramétricas de la superficie descrita por los puntos medios de las cuerdas de la hélice circular de ecuaciones paramétricas: $x = a\ \cos t,\ y = a\ \operatorname{sen} t,\ z = bt;\ -\infty < t < \infty$.

2.- (*Desarrollable tangencial de una curva*) Hallar unas ecuaciones paramétricas de la superficie engendrada por las rectas tangentes a la curva $c(t) = (t, t^2, t^3)$, para $-\infty < t < \infty$.

3.- Hallar la ecuación implícita de la superficie de ecuaciones paramétricas
$x = a\,u\cos v,\ y = a\,u \operatorname{sen} v,\ z = bu$, para $-\infty < u < \infty, 0 \le v < 2p$, $a > 0, b > 0$.

4.- Probar que las superficies siguientes son de revolución y hallar el eje de revolución:

a) $4xy - 8xz - 4yz - 3y^2 = 1$.

b) $x = u,\ y = 1 + v,\ z = \dfrac{v^2}{2u}$

5.- Hallar la superficie obtenida al trasladar la parábola $x^2 = a^2 z,\ y = 0$, paralelamente a si misma, a lo largo de la parábola $y^2 = b^2 z,\ x = 0$.

6.- (*Superficies regladas*) Una superficie reglada es aquella engendrada por rectas R_p, que denominamos directrices, que se apoyan en los puntos P de una curva G, que denominamos generatriz.

a) Encontrar la forma general para unas ecuaciones paramétricas de una superficie reglada cuya generatriz G viene dada por $c(t) = (x(t), y(t), z(t))$ y un vector director de la directriz en cada punto $c(t)$ de G es $(v_1(t), v_2(t), v_3(t))$.

b) Hallar las ecuaciones paramétricas de la superficie reglada engendrada por las rectas que pasan por el punto (1,1,1) y se apoyan en la curva $x^2 + y^2 = 1,\ z = 0$. Esbozar un dibujo de esta superficie.

c) El *hiperboloide de una hoja* es una superficie reglada, dar una posible generatriz y un vector para las directrices. Comprobar que también es una superficie de revolución y obtener el eje de revolución y la curva que gira.

7.- Sea la superficie $x = u + v,\ y = u - v,\ z = u^2 - v^2$, para $-\infty < u, v < \infty$.

a) Hallar el plano tangente en el punto (2,0,0).

b) Comprobar que el cambio de parámetros $u = \dfrac{a+b}{2},\ v = \dfrac{a-b}{2}$ tiene Jacobiano de rango máximo.

Expresar la nueva parametrización en función de a y b.

8.- Hallar el plano tangente en el origen al paraboloide elíptico y al paraboloide hiperbólico.

9.- Hallar el ángulo que forman las curvas coordenadas a la superficie
$x = u + v,\ y = u - v,\ z = uv$, para $-\infty < u, v < \infty$ en el punto (2,0,1).