



### GEOMETRIA DIFERENCIAL DE CURVAS

- 1.- Se denomina cicloide a la curva descrita por un punto fijo  $P$  de una circunferencia que rueda sin deslizamiento a lo largo de una recta. Suponer que la recta es el eje  $OX$ , que la circunferencia está contenida en el plano  $XY$ , tiene radio  $a$  y que inicialmente  $P$  esté en el origen. Encontrar una ecuaciones paramétricas para la cicloide.
- 2.- Hallar unas ecuaciones paramétricas en las que no intervengan radicales, para las siguientes curvas:  
a)  $x^2 + y^2 = 1, x + y + z = 1$   
b)  $y^2 + (z - 3)^2 = 9, x = 0$
- 3.- Encontrar la recta tangente a las siguientes curvas en el punto  $P$  que se indica:  
a)  $c(t) = (t, t^2, t^3) \quad P = (1,1,1)$   
b)  $c(t) = (\cosh t, \sinh t, 0) \quad P = (5/3, 4/3, 0)$   
c)  $y^2 + (z - 3)^2 = 9, x = 0 \quad P = (0,3,3)$
- 4.- Calcular la longitud de los siguientes arcos de curva:  
a) *Catenaria*:  $(t, \cosh t, 0)$  para  $t \in [0,1]$ .  
b) *Helice circular*:  $(a \cos t, a \sin t, bt)$  desde  $(a,0,0)$  hasta  $(a,0,2pb)$   
c) *Parábola semicúbica*:  $(t, t^{3/2}, 0)$  desde  $(0,0,0)$  hasta  $(4,8,0)$
- 5.- La curva dada por la trayectoria de un punto  $P$  de una circunferencia  $C$  de radio 1 que rueda sobre otra circunferencia  $D$  también de radio 1 se denomina *cardioide*, a causa de su forma de corazón. Hallar unas ecuaciones paramétricas para la cardioide, suponiendo que ambas circunferencias están con tenidas en el plano  $XY$ , que  $D$  está centrada en el origen de coordenadas y que el punto  $P$  parte de  $(1,0,0)$ . Calcular la longitud de dicha curva.
- 6.- Hallar la expresión de la función longitud de arco para una curva definida por  $y = f(x), z = 0$ .
- 7.- Expresar la curva de ecuaciones paramétricas:  $x = \sin t + \cos t, y = \sin t - \cos t, z = t$ , en función de su parámetro arco.
- 8.- Sean las coordenadas cilíndricas  $(r, \mathbf{q}, z)$  relacionadas con las cartesianas por  
$$x = r \cos \mathbf{q}, y = r \sin \mathbf{q}, z = z, \text{ para } 0 \leq r < \infty, 0 \leq \mathbf{q} < 2\mathbf{p}, -\infty < z < \infty$$
  
a) Calcular la expresión de la longitud de arco para una curva expresada en ecuaciones paramétricas de coordenadas cilíndricas:  $r = r(t), \mathbf{q} = \mathbf{q}(t), z = z(t)$ .  
b) Calcular la longitud del arco de la curva de ecuaciones implícitas en coordenadas cilíndricas  
 $r = ae^{\mathbf{q} \cotag b}, z = 0$ , para  $a \neq 0, 0 < b < \mathbf{p}$ , a partir del punto  $\mathbf{q}_0 = 0$ .
- 9.- Dada una parametrización  $c : I \rightarrow \mathbf{R}^3$  de una curva  $G$ . Se define el *plano osculador* a la curva  $G$  en un punto  $P_0 = c(t_0)$  como el plano que pasa por  $P_0$  y tiene por vectores directores  $c'(t_0)$  y



$c''(t_0)$ . Encontrar los planos osculadores a la hélice circular dada por  $c(t) = (\cos t, \sin t, t)$  en los puntos  $(1,0,0)$  y  $(0,1,\pi/2)$  respectivamente.

10.- Demostrar que si todas las tangentes a una curva pasan por un punto fijo, entonces esta curva es una recta.

11.- El vector de posición de una partícula que se mueve en el espacio es  $c(t) = (x(t), y(t), z(t))$  describe una curva.

a) Demostrar que el vector velocidad  $v(t) = \frac{dc}{dt}$  es un vector que tiene la dirección del vector

tangente  $T(t)$  y su módulo es  $\frac{ds}{dt}$ .

b) Si el movimiento se realiza con velocidad de módulo constante demostrar que los vectores velocidad y aceleración son perpendiculares.

c) Demostrar que el vector aceleración  $a(t) = \frac{dv}{dt}$  se puede descomponer en dos vectores: uno

en la dirección del vector tangente  $T(t)$  (aceleración tangencial,  $a_T(t)$ ) y otro en la dirección del vector normal  $N(t)$  (aceleración normal,  $a_N(t)$ ); es decir,

$$a(t) = a_T(t) + a_N(t).$$

d) Calcular la aceleración tangencial y la aceleración normal de una partícula que se mueve con vector de posición  $c(t) = (3t, -3t, 2t)$  y de otra con vector  $c(t) = (e^t, e^{-t}, 0)$ .

12.- Hallar la curvatura y la torsión de la curva de ecuaciones paramétricas

$$x = t^2, \quad y = \cos t, \quad z = \sin t, \quad 0 < t < \infty.$$

13.- (Hélices) Una curva cuyos vectores tangentes forman un ángulo  $\alpha$ , constante, con un vector unitario  $E$  llamado eje recibe el nombre de hélice. Comprobar que las siguientes curvas son

hélices, calcular  $\alpha$ , calcular su curvatura  $k(t)$  y su torsión  $t(t)$  y comprobar que  $\frac{k(t)}{t(t)} = \tan \alpha$ :

(Nota: usar que el producto escalar de dos vectores  $u \cdot v = |u||v|\cos \alpha$ , donde  $\alpha$  es el ángulo limitado por  $u$  y  $v$ )

a) (Hélice circular)  $x = a \cos t, y = a \sin t, z = bt, -\infty < t < \infty$ , siendo  $a$  y  $b$  constantes.  
(Pista: tomar  $E = (0,0,1)$ ).

b)  $x = 2a^2t, y = 9at^2, z = 27t^3, -\infty < t < \infty$ , siendo  $a$  una constante positiva.

(Pista: tomar  $E = \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$ ).