DIIN

Asignatura: ***MA1149 Matemáticas II***

1.- a) Calcular el área de la figura plana del primer cuadrante limitada por el eje *OX* (es decir, la recta $y=0$), la parábola $y^2=4x$ y la recta $x+y=3$.
b) Usando integrales de superficie, hallar el área de la superficie *S* de ecuaciones paramétricas
$x = \cos u \cos v,\ y = \cos u \,\mathrm{sen}\, v,\ z = \mathrm{sen}\, u,$ para $0 \le u \le \frac{\pi}{4},\ 0 \le v \le u$.

2.- a) Calcular, pasando a coordenadas polares, $\iint_S \sqrt{1-x^2-y^2}\, dx\, dy$
donde el recinto *S* es el círculo de radio 1 y centro (0,0).
b) Sean $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ y $g : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ dos funciones integrables en un recinto $D \subset \mathbf{R}^3$ de modo que $\int_D f(x)dx = \int_D g(x)dx = m$. Si $h : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ es otra función integrable en $D \subset \mathbf{R}^3$ de modo que para todo punto $x \in D$ se tiene que $f(x) \le h(x) \le g(x)$.
Indicar razonadamente cuánto vale $\int_D h(x)dx$.

3.- a) Calcular el área de la figura plana del primer cuadrante limitada por el eje *OX* (es decir, la recta $y=0$), la parábola $y^2=3x+1$ y la recta $x+y=3$.
b) Aplicar el teorema de Stokes para calcular la integral de superficie del campo
$F(x,y,z) = (y,z,x)$ sobre el paraboloide dado por $z = 1-(x^2-y^2),\ z \ge 0$.

4.- a) Hallar la masa de una lámina triangular de vértices (0,0), (0,3) y (2,3) si su densidad en cada punto (x,y) viene dada por $f(x,y) = 2x+y$.
b) Calcular el volumen de la región del primer octante (es decir, $x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0$) acotada superiormente por el cilindro parabólico $z = 1-y^2$ y comprendida entre los planos verticales $x+y=1,\ x+y=3$.

5.- a) Sea $c(t) = \left(4(\cos t+1),\ 4\mathrm{sen}\, t,\ 3t\right);\quad 0 \le t$ una parametrización de una curva en el espacio.
Calcular el parámetro longitud de arco de dicha curva y la nueva parametrización arco.
b) Utilizando la parametrización arco, calcular la curvatuta y la torsión

6.- a) Comprobar si el punto *P* = (3,1,15) es un punto regular de la superficie dada por $z = 25-x^2-y^2$. En caso afirmativo obtener un vector normal a la superficie en el punto *P* y el plano tangente por *P*.
b) Expresar en coordenadas cilíndricas la región del espacio acotada inferiormente por el paraboloide $z = x^2+y^2$ y superiormente por el plano $z = 4$.

7.- a) Sea $c(t) = \left(\cos t,\ \mathrm{sen}\, t,\ \sqrt{3}\, t\right);\ -\pi \le t \le \pi$ una parametrización de una curva en el espacio.
Calcular el parámetro longitud de arco y la función curvatura de dicha curva.
b) Calcular el vector normal y el plano tangente a la superficie parametrizada por $x = u^2-v^2,\ y = u+v,\ z = u^2+4v$ en el punto (–1/4,1/2,2).

8.- a) Sea $c(t)=\left(e^t\cos t\,,\,e^t\operatorname{sen} t\,,\,e^t\right);\,0\le t$ una parametrización de una curva en el espacio. Calcular el parámetro longitud de arco de dicha curva. Calcular la curvatura de dicha curva en el punto (1,0,1).

b) Comprobar si el punto P = (2,0,0) es un punto regular de la superficie dada por $x^2+y^2-2z^2=4$. En caso afirmativo obtener un vector normal a la superficie en el punto P y el plano tangente por P.

9.- a) Calcular la longitud del arco de la curva de $\mathbb{R}^3$ que tiene por ecuaciones implícitas $y=x^{3/2}$, $z=0$ comprendido entre $x=0$ y $x=5$. Dar el vector tangente a dicha curva en el punto (1, 1, 0).

b) Comprobar si el punto P = (2,0,0) es un punto regular de la superficie dada por $x^2+y^2-2z^2=4$. En caso afirmativo obtener un vector normal a la superficie en el punto P y el plano tangente por P.

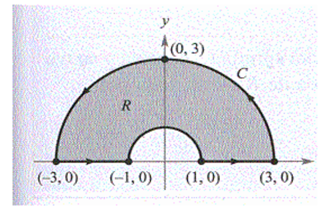
10.- a) Sea $c(t)=\left(\cos\dfrac{t}{\sqrt{2}}\,,\,\operatorname{sen}\dfrac{t}{\sqrt{2}}\,,\,\dfrac{t}{\sqrt{2}}\right);-\pi\le t\le\pi$ una parametrización de una curva en el espacio. Comprobar que t es un parámetro arco y calcular las funciones curvatura y torsión.

b) Comprobar que el punto (1,1,5) es un punto regular de la superficie $z=5xy$. Calcular el vector normal y el plano tangente a la superficie en dicho punto.

11.- a) Usar el teorema de Green en el plano para calcular la integral de línea siguiente

$$\oint_C (\operatorname{arctg}(x)+y^2)dx+(e^y-x^2)dy$$

siendo C la curva que encierra la media región anular de la figura .



b) Calcular la superficie del trozo del paraboloide $z=x^2+y^2$ comprendido entre los planos z = 0 y z = 4.

12.- Responder a las siguientes cuestiones:

a) La aceleración de un cierto automóvil deportivo es, en cada instante proporcional a la diferencia entre 250 Km/h y la velocidad que lleva. Sabiendo que el automóvil pasa del reposo a la velocidad de 100 Km/h en 10 segundos, ¿cuánto tiempo necesitará para pasar del reposo a 200 km/h?

b) Se sabe que la integral de línea de un campo vectorial F a lo largo de una curva parametrizada Γ vale 2π y que la integral de línea de otro campo vectorial G a lo largo de la misma curva Γ (con la misma paremątrización) vale 7. ¿Cuánto vale la integral de línea del campo $H = 2F - G$ a lo largo de Γ? ¿Y cuánto vale la integral de línea de F a lo largo de $-\Gamma$? Justificar la respuesta.

13.- a) Calcular el área de la región plana del primer cuadrante limitada por la hipérbola $xy = 5$ y la recta $y = 6–x$.

b) Aplicando el teorema de la divergencia, calcular la integral de superficie $\int_S F\cdot dS$, siendo $F(x,y,z)=(x^3,x^2y,x^2z)$ siendo S la superficie cerrada formada por el cilindro $x^2+y^2=1,\quad 0\le z\le 4$ y los discos $x^2+y^2\le 4,\quad z=0$ y $x^2+y^2\le 4,\quad z=2$.

14.- Considerar el campo vectorial

$$F:\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3,\ F(x,y,z)=(\operatorname{sen} y+z, x\cos y - z, x-y).$$

Se pide:

a) Calcular rot(F).

b) Encontrar una función potencial de F.

c) Calcular el trabajo realizado por F al desplazar una partícula desde el punto (1,0,2) al punto $(2,\frac{\pi}{2},3)$.

15.- a) Usar el teorema de Green para calcular la integral de línea

$$\oint_{\Gamma}(2xy-x^2)dx+(x+y^2)dy$$

siendo Γ la curva que limita al región entre $y=x^2$ e $y=\sqrt{x}$.

b) Calcular, usando integrales de superficie, el área de la superficie S de ecuaciones paramétricas $x=\cos u\cos v,\ y=\cos u \operatorname{sen} v,\ z=\operatorname{sen} u,$ para $0\le u\le\frac{\pi}{4},\ 0\le v\le u$.

16.- Considérese el campo vectorial

$$F:\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3,\ F(x,y,z)=((x-y^2+1)e^{x+y},(x-y^2-ay)e^{x+y},0).$$

Se pide:

a) Calcular el valor que debe tomar a para que rot(F) = 0.

b) Decidir justificadamente si F es un campo conservativo y, en caso afirmativo, calcular la función potencial.

c) ¿Cuánto vale la integral de línea de F a lo largo de una curva que une los puntos (0,2,0) y (1,1,0)?

d) ¿Cuánto vale la integral de línea de F a lo largo una circunferencia?

17.- Sean los campos vectoriales de $\mathbb{R}^3$

$$F(x,y,z)=(\cos x - z, y^2, xz) \ \text{ y } \ G(x,y,z)=(2xz, 3z^2, x^2+6yz)$$

a) Calcular rot(F) y rot(G)

b) Determinar cuál de estos campos es conservativo y cuál no razonando la respuesta.

c) Calcular una función potencial en el caso que sea posible.

18.- Considerar el campo vectorial

$$F:\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3,\ F(x,y,z)=(y, z\cos(yz)+x, y\ \cos(yz)).$$

Se pide:

a) Calcular rot(F).

b) Decidir justificadamente si F es un campo conservativo y, en caso afirmativo, calcular la función potencial.

c) ¿Cuánto vale la integral de línea de F a lo largo de una curva que une los puntos (1,2, π) y (1,8,0)?

d) ¿Cuánto vale la integral de línea de F a lo largo de la circunferencia unidad? Justificar la respuesta.

19.- Responder a **dos** de las siguientes cuestiones, justificando la respuesta:

a) Comprobar que las funciones $y=1,\ y=\mathrm{e}^{-x},\ y=x\mathrm{e}^{-x}$ son soluciones de la ecuación diferencial $y'''+2y''+y'=0$, y dar la solución general, indicando el resultado o resultados que se usan.

b) Demostrar que la ecuación diferencial $(x+y^2)\mathrm{d}x-2yx\mathrm{d}y=0$ posee un factor integrante que depende sólo de x.

c) ¿Es exacta la ecuación diferencial $x(2x^2+y^2)+y(x^2+2y^2)dy=0$? ¿Y homogénea?

20.- Responder a las siguientes cuestiones, justificando la respuesta:

a) Decidir si la función $y=3\operatorname{sen}x-2\cos x+3$ es solución del problema de valor inicial $y''+y=3,\ y(0)=1$.

b) Encontrar la solución general de la ecuación diferencial

$$(y+xy^2)dx+(x-x^2y)dy=0$$

sabiendo que admite a $\mu(x,y)=\dfrac{1}{x^2y^2}$ como factor inetgrante.

21.- Responder a las siguientes cuestiones, justificando la respuesta:

a) Si sabemos que las raíces del polinomio característico de una ecuación lineal homogénea de segundo orden con coeficientes constantes son $-1+2i$ y $-1-2i$. ¿Cuál es su solución general?

b) Encontrar la solución general de la siguiente ecuación diferencial: $xy''+y'=4x$

22.- Resolver:

a) $y''+2y'+y=2+\operatorname{sen}x$;

b) $\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx}=2y_1+4y_2 \\ \dfrac{dy_2}{dx}=3y_1+3y_2 \end{cases}$

23.- Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales.

a) $x(x^2+y^2)+(x^2y+y^3)\dfrac{dy}{dx}=0$

b) $yy''=(y')^2$

24.- a) Encontrar la solución general de $y''+2y'+y=2x^2e^{2x}+3e^{-x}$

b) Encontrar la solución general del sistema: $\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx}=7y_1+6y_2 \\ \dfrac{dy_2}{dx}=2y_1+6y_2 \end{cases}$

25.- Responder a **dos** de las siguientes cuestiones, justificando la respuesta:

a) Comprobar que las funciones $y=1,\ y=e^{-x},\ y=xe^{-x}$ son soluciones de la ecuación diferencial $y'''+2y''+y'=0$, y dar la solución general, indicando el resultado o resultados que se usan.

b) Indicar porqué la función $y=3e^x+2e^{2x}-3x$ es la única solución del problema de valor inicial $y''-4y=12x;\quad y(0)=4;\quad y'(0)=1$.

c) Comprobar que $\mu(x,y)=x+y^2$ es un factor integrante para la ecuación diferencial $(3x+2y+y^2)dx+(x+4xy+5y^2)dy=0$.

d) Expresar la siguiente ecuación lineal de tercer orden como un sistema de ecuaciones lineales y dar la forma matrical de este $y'''-y''+y'-y=3x$.

26.- Dar la solución general de las siguientes ecuaciones:

a) $y''+4y'+4y = 8e^{-2x} + \cos x$

b) $\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = -4y_1 + 2y_2 \\ \dfrac{dy_2}{dx} = -\dfrac{5}{2}y_1 + 2y_2 \end{cases}$

27.- El desplazamiento angular θ de la aguja del indicador de gasolina de un coche está dado por la ecuación $\dfrac{d^2\theta}{dt^2} + 44\dfrac{d\theta}{dt} + 121\theta = 0$; $\dfrac{d\theta}{dt}(0) = 0$; $\theta(0) = \theta_{ss}$. Donde θ_{ss} es el desplazamiento angular en estado estacionario. Encontrar la función θ(t) que describe este desplazamiento angular en función de θ_{ss}.

28.- Resolver:

a) $y''-6y'+9y = 9\,\mathrm{sen}\,3x + 2e^{3x}$;

b) $\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = y_1 + 2y_2 \\ \dfrac{dy_2}{dx} = 3y_1 + 2y_2 \end{cases}$

29.- Responder a las siguientes cuestiones, justificando la respuesta:

a) Comprobar que la función $\mu(x) = \dfrac{1}{x^4}$ es un factor integrante para la ecuación diferencial $(x^4 \ln x - 2xy^3)dx + 3x^2y^2dy = 0$.

b) Resolver la siguiente ecuación diferencial

$$(y - x^3)dx + (x + y^3)dy = 0$$

30.- Resolver:

a) $y''+10y'+25y = 14e^{-5x} + 3x$;

b) $\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = -4y_1 + 2y_2 \\ \dfrac{dy_2}{dx} = -\dfrac{5}{2}y_1 + 2y_2 \end{cases}$

31.- Dar la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales.

a) $(3x^2 + 4xy)dx + (2x^2 + 2y\ \ )dy = 0$

b) $x = (y'')^2 + 1$

32.- Usando el principio de superposición dar la solución general de la siguiente ecuación lineal:

$$y''+2y'+y = 1 + 2\cos x$$

33.- Dar la solución del siguiente problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = 3y_1 + 8y_2 \\ \dfrac{dy_2}{dx} = -y_1 - 3y_2 \\ y_1(0) = 6, \quad y_2(0) = -2 \end{cases}$$