ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

SEPARADAS $y' = f(x)$ → SOL.: $y = \int f dy + C$

SEPARABLES $F(x)dx + G(y)dy = 0$ → SOL.: $\int F dx + \int G dy = C$

HOMOGÉNEAS $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ cambio $y = ux$

RED. HOMOG. $y' = f\left(\dfrac{ax+by+c}{a'x+b'y+c'}\right)$ (x_0, y_0) pto. de corte cambio $\begin{cases} x = u + x_0 \\ y = v + y_0 \end{cases}$

Paralelas cambio $u = ax + by$

EXACTAS $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$ → SOL.: $F = \int M dx + C$

$C = \int N dy - \int \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\int M dx\right) dy$

FACTOR INT. $N\dfrac{\partial \ln m}{\partial x} - M\dfrac{\partial \ln m}{\partial y} = \dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}$

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{N} = p(x), m = m(x)$$

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{M} = p(y), m = m(y)$$

EC. LINEALES $y' + p(x)y = r(x)$ → SOL.: $y = y_h + y_p$

$y_h = Ce^{-\int p dx}$

$y_h = C(x)e^{-\int p dx}$

BERNOULLI $y' + p(x)y = r(x)y^q, q \neq 0,1$ cambio $u = \dfrac{1}{y^{q-1}}$

SEGUNDO ORDEN $y'' = f(x)$ → SOL.: $y = \int (\int f dx + C_1) + C_2$

$y'' = f$, con $f = \begin{cases} f(y) \\ f(x, y') \\ f(y, y') \end{cases}$ cambio $y' = z$

ECUACIONES LINEALES HOMOGENEAS
CON COEFICIENTES CONSTANTES

Una ecuación diferencial lineal homogénea con coeficientes constantes de orden n es una ecuación del tipo:

$$y^{(n} + a_{n-1}y^{(n-1} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

donde a_{n-1}, ..., a_1, a_0 son números reales.

El polinomio característico de la ecuación es un polinomio de grado n cuyos coeficientes son los coeficientes de la EDO, es decir

$$P(t) = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \ldots + a_1 t + a_0$$

Por cada raíz de multiplicidad r del polinomio característico tendremos r soluciones linealmente independientes de la EDO. Como la suma de las multiplicidades de las raíces de un polinomio de grado n es n, trabajando con todas las raíces obtendremos n soluciones linealmente independientes de la EDO, y por consiguiente una base del espacio de soluciones.

Sea entonces m una raíz de P(t) las soluciones que aporta m son las siguientes:

1) Si m $\in$ **R** y tiene multiplicidad 1, tenemos la solución

$$y = \mathrm{e}^{mx}$$

2) Si m $\in$ **R** y tiene multiplicidad r, tenemos las r soluciones

$$y_1 = \mathrm{e}^{mx},\ y_2 = x\mathrm{e}^{mx},\ \ldots,\ y_r = x^{r-1}\mathrm{e}^{mx}$$

3) Si m=a+bi $\in$ **C** y tiene multiplicidad 1, entonces $\overline{m} = a - bi$ es también raíz simple de P(t) y obtenemos dos soluciones (una por cada raíz):

$$y_1 = \mathrm{e}^{ax}\cos bx,\ \ y_2 = \mathrm{e}^{ax}\mathrm{sen}\,bx$$

4) Si m=a+bi $\in$ **C** y tiene multiplicidad r, entonces $\overline{m} = a - bi$ es también raíz de multiplicidad r de P(t) y obtenemos 2 r soluciones (r por cada una):

$$y_1 = \mathrm{e}^{ax}\cos bx,\ \ y_2 = x\mathrm{e}^{ax}\cos bx, \ldots,\ y_r = x^{r-1}\mathrm{e}^{ax}\cos bx$$

$$y_{r+1} = \mathrm{e}^{ax}\mathrm{sen}\,bx,\ \ y_{r+2} = x\mathrm{e}^{ax}\mathrm{sen}\,bx, \ldots,\ y_{2r} = x^{r-1}\mathrm{e}^{ax}\mathrm{sen}\,bx$$

ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES:

Resumen del método de los coeficientes indeterminados.

Caso I. Ninguna de las funciones de la solución particular supuesta es una solución de la ecuación diferencial homogénea asociada.

En este caso, ensayamos soluciones particulares de la forma de g(x), como hemos hecho en los ejemplos.

En la siguiente tabla aparece un resumen de los tipos más frecuentes de términos independientes, g(x):

Término independiente, g(x).	**Solución particular, y_p.**
$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x^1 + a_0 = P_n(x)$	$A_n x^n + A_{n-1}x^{n-1} + ... + A_1 x^1 + A_0 = \tilde{P}_n(x)$
e^{ax}	Ae^{ax}
$\operatorname{sen} ax$ o $\cos ax$	$A \operatorname{sen} ax + B\cos ax$
$P_n(x)e^{ax}$	$\tilde{P}_n(x)e^{ax}$
$e^{ax}\operatorname{sen} bx$ o $e^{ax}\cos bx$	$e^{ax}(A\operatorname{sen} bx + B\cos bx)$
$P_n(x)\operatorname{sen} bx$ o $P_n(x)\cos bx$	$\tilde{P}_n(x)(A\operatorname{sen} bx + B\cos bx)$
$P_n(x)e^{ax}\operatorname{sen} bx$ o $P_n(x)e^{ax}\cos bx$	$\tilde{P}_n(x)(A\operatorname{sen} bx + B\cos bx)e^{ax}$

Caso II. Alguna de las funciones de la solución particular supuesta es una solución de la ecuación diferencial homogénea asociada.

En este caso, se supone una solución particular en la cual su multiplica la solución de la ecuación homogénea por el término x^k, donde k es el menor número entero no negativo que hace que desaparezca la duplicación. La soluciones particulares que se deben probar son las mismas que en el caso I, pero multiplicando por dicho término.