DIIN

Asignatura: ***MA1139 Matemáticas I***

1.- Responder a las siguientes cuestiones justificando la respuesta:

1.1. Dar la fórmula que relaciona las dimensiones de la suma y la intersección de dos subespacios vectoriales V_1 y V_2 de $\mathbf{R}^4$.
Sean $V_1 = \{(x,y,z,t) \in \mathbf{R}^4 : x+y-z-t = 0, 2x+2z = 0\}$ y $V_2 = L\{(1,1,1,0),(0,0,1,1)\}$, decidir justificando la respuesta si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa:

a) $\dim(V_1 \cap V_2) = 1$.

b) $\dim(V_1 + V_2) = \dim(V_1) + \dim(V_2)$

c) $\mathbf{R}^4 = V_1 \oplus V_2$.

1.2. Dar la definición de matriz ortogonal.
¿Cuáles de las siguientes matrices son ortogonales?

$$\text{a)}\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \qquad \text{b)}\begin{pmatrix} 1/\sqrt{10} & 6/\sqrt{40} \\ 3/\sqrt{10} & 2/\sqrt{40} \end{pmatrix}$$

$$\text{c)}\begin{pmatrix} 1/\sqrt{10} & 6/\sqrt{40} \\ 3/\sqrt{10} & -2/\sqrt{40} \end{pmatrix} \qquad \text{d)}\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

1.3. Sea $M = \{(x,y,z): x+ay+z = 0,\ 2x+3y+az=0,\ 2x-2y+az=0\}$ un subespacio vectorial de $\mathbf{R}^3$, decidir justificando la respuesta si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa:

a) Para $a = 2$ la dimensión de M es 2.

b) Para $a = 2$ el conjunto $\{(1,0,-1), (2,-1,1)\}$ es un sistema de vectores de M linealmente independiente.

c) $\{(1,0,-1)\}$ es una base de M.

2.- Responder a las siguientes cuestiones justificando la respuesta:

2.1. Sea $f : \mathbf{R} - \{3\} \to \mathbf{R}$ una aplicación definida por $f(x) = \dfrac{2x-1}{x-3}$. Decidir, justificando la respuesta,si f es inyectiva y si es sobreyectiva.

2.2. Sean $V_1 = \{(x,y,z,t) \in \mathrm{R}^4 : x+y-z-t = 0;\quad 2x+2z = 0\}$ y $V_2 = L\{(1,1,1,0),(0,0,1,1)\}$, calcular las dimensiones de los subespacios $V_1 + V_2$ y $V_1 \cap V_2$.

2.3. Sea A una matriz real 3x3 cuyos autovalores son 1, 1+2i y 1-2i y cuyos subesapcios de autovecotores complejos son

$$V_1(1) = L\{(1,0,1)\}, V_1(1+2i) = L\{(0,1-3i,2+i)\}, V_1(1+2i) = L\{(0,1+3i,2-i)\}$$

Dar la forma canónica de Jordan real J de A y la matriz de paso real P.

2.4. Dar la definición de matriz ortogonal.
¿Es ortogonal la siguiente matriz?

$$A=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.5. Sea $M = \{(x,y,z): x+ay+z = 0,\ x+az=0,\ 2x+ay+(a+1)z=0\}$ un subconjunto de $\mathbf{R}^3$, Comprobar que para $a \neq 2$, M es un subespacio vectorial de $\mathbf{R}^3$ y calcular su dimensión.

3.- Responder a las siguiente cuestiones, justificando la respuesta:

a) Hallar la inversa de la siguiente matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) Sean dos subespacios vectoriales U y W de $\mathbf{R}^3$, de modo que $\dim(U)=2$, W está generado por los vectores $\{(1,1,0),(0,1,0),(1,2,0)\}$ y $\dim(U\cap W) = 1$. ¿Cuál es la dimensión del subespacio $U+W$?

c) Reducir la matriz $A=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ a su forma canónica de Jordan y dar la matriz del cambio de base.

4.- Responder a las siguientes cuestiones, justificando la respuesta:

a) Considérense los subespacios vectoriales de $\mathbf{R}^4$,

$$V = L\{(1,1,0,0),(0,2,-1,0)\} \text{ y } W = L\{(0,-1,2,1),(1,0,2,0),(2,1,2,-1)\}$$

Calcular, razonando al respuesta, $\dim(V)$, $\dim(W)$, $\dim(V+W)$ y $\dim(V\cap W)$.

a) Dados los subespacios vectoriales de $\mathbf{R}^3$,

$$U=\{(a,2a,a+b) : a,b\in \mathbf{R}\},\ V=\{(x,y,z)\in \mathbf{R}^3 : x=0, y=0\}$$

dar unas ecuaciones implícitas de $U\cap V$ y unas ecuaciones paramétricas de $U+V$.

b) Sea $B = \{\ \overline{e}_1, \overline{e}_2\ \}$ una base de $\mathbf{R}^2$. En esta bases se dan los vectores $v = (1,3)$, $\overline{u}_1=(1,2), \overline{u}_2=(2,-1)$. Hallar las coordenadas de v con respecto a la base $B' = \{\ \overline{u}_1, \overline{u}_2\ \}$.

d) Comprobar que los vectores $\overline{u}=(1,2,-1,0)$, $\overline{v}=(-1,1,1,1)$ de $\mathbf{R}^4$ forman un sistema de vectores linealmente independientes y ampliar dicho sistema a una base de $\mathbf{R}^4$.

5.- a) Sea la aplicación $f : \mathbf{R} - \{1\} \to \mathbf{R},\ f(x)=\dfrac{2x+1}{3x-1}$. Determinar si es inyectiva y si es sobreyectiva. Dar la imagen de f y calcular su inversa en caso de que exista.

b) Decidir si el conjunto

$$U=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in Mat_{2\times 2}(\mathbf{R}) : a-b+c-d=0\right\}$$

es un subespacio vectorial de $Mat_{2\times 2}(\mathbf{R})$.

6.- Discutir y resolver en los casos de compatibilidad, en función del parámetro a, el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{aligned} 3x-ay+2z&=a-1\\ 2x-5y+3z&=1\\ x+3y-(a-1)z&=0 \end{aligned}\right\}$$

7.- Dados los subespacios vectoriales de $\mathbf{R}^3$

$$W_1=\{(a,2a,a+b)\in\mathbf{R}^3 : a,b\in\mathbf{R}\}$$
$$W_2=\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 : x=0,\ y=0\}$$

se pide:

a) Hallar la dimensión de los subespacios W_1+W_2 y $W_1\cap W_2$.
b) Obtener una base de W_1+W_2 y otra de $W_1\cap W_2$.
c) Dar ecuaciones paramétricas e implícitas de W_1+W_2 y de $W_1\cap W_2$.
d) Determinar un subespacio suplementario de W_1.

8.- Calcular la dimensión y dar una base, según los valores del parámetro a, del siguiente subespacio vectorial:

$$W=\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 : ax+by+z=0,\ x+y+z=0,\ x+ay+z=0\}.$$

9.- Dados los subespacios vectoriales de $\mathbf{R}^4$

$$V=\{(x,y,z,t)\in\mathbf{R}^4 / x-2z+t=0,\ x+y+z-2t=0,\ 2x+y-z-t=0\}$$
$$W=\{(3\alpha+\beta+\gamma,\ 2\alpha,\ -3\alpha+\beta-\gamma,\ \beta-2\gamma) : \alpha,\beta,\gamma\in\mathbf{R}\}.$$

Se pide:

a) Determinar la dimensión de V y de W.
b) Determinar una base y unas ecuaciones paramétricas de V
c) Determinar una base y unas ecuaciones implícitas de W.
d) Determinar la dimensión de los subespacios $(V+W)$ y $(V\cap W)$.
e) Dar una base del subespacio $(V+W)$.
f) Dar uan base de $V\cap W$.

10.- Sea $U= L(\{(1,1,0,-2), (0,-1,-1,3), (-1,0,1,-1)\})$ y
$V=\{(x,y,z,t)\in\mathbf{R}^4 \mid x+z+y+t=0;\ 2x+z+t=0\}$.

a) Encontrar una base de $U\cap V$.
b) Ecuaciones implícitas de $U+V$.
c) Encontrar una base ortonormal de $U+V$ mediante el método de Gram-Schmidt

11.- Sea $f:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3$ una aplicación lineal tal que

$f(e_2)=u_1+u_2-u_3$,
$f(e_1-e_2)=2u_1+u_3$,
$f(e_2-e_3)= -u_1+u_2-2u_3$,

donde $B=\{e_1,e_2,e_3\}$ es una base $\mathbf{R}^3$ y $B'=\{u_1, u_2, u_3\}$ es una base de $\mathbf{R}^3$.

a) Matriz asociada a f en bases B y B'.
b) Ecuaciones paramétricas de Im(f).
c) Base de Ker(f).
d) Ecuaciones implícitas de $f(V)$ donde $V=L(\{(1,1,-1)_B\})$.

12.- Considérese la siguiente aplicación lineal de $\mathbf{R}^3$ en $\mathbf{R}^4$:

$$\begin{array}{cccc} f: & \mathbf{R}^3 & \to & \mathbf{R}^4\\ & (x,y,z) & \to & (x+y,\ y+z,\ x+2y+z,\ -x+y+2z) \end{array}$$

Se pide:

a) Dar la matriz asociada a f en la base canónica.
b) Dar una base del núcleo de f y decidir si f es inyectiva.
c) Dar la dimensión y una base de la imagen de f.
d) Dar las ecuaciones implícitas de la imagen de f.
e) Ampliar la base de Im f hallada en c) hasta una base de $\mathbf{R}^4$.

13.- Considérese la aplicación lineal f de $\mathbf{R}^4$ en $\mathbf{R}^3$ definida por:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2 - x_3 + x_4,\ x_2 - x_4,\ x_1 - x_3 + 2x_4)$$

Se pide:

a) Determinar la matriz asociada a f en las bases canónicas.
b) Hallar la dimensión de la imagen de f y decidir si f es sobreyectiva.
c) Hallar la dimensión del núcleo de f y decidir si f es inyectiva.
d) Dar unas ecuaciones implícitas de la imagen de f.
e) Dar una base del núcleo de f.

14.- Considérese la aplicación lineal $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ cuya matriz asociada en las bases canónicas es:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Se pide:

a) Determinar los valores de n y m.
b) ¿Puedes decidir si f es inyectiva sin calcular el núcleo? Razona tu respuesta.
c) Hallar la dimensión de la imagen de f y decidir si f es sobreyectiva.
d) Hallar al dimensión y dar una base del núcleo de f.
e) Dar unas ecuaciones implícitas de la imagen de f.

15.- Considérese la aplicación lineal $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ cuya matriz asociada en las bases canónicas es:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se pide:

a) Determinar los valores de n y m.
b) ¿Puedes decidir si f es inyectiva sin calcular el núcleo? Razona tu respuesta.
c) Hallar la dimensión de la imagen de f y decidir si f es sobreyectiva.
d) Hallar al dimensión y dar una base del núcleo de f.
e) Dar unas ecuaciones implícitas de la imagen de f.

16.- a) Determina todas las posibles formas canónicas de Jordan (salvo permutación de cajas elementales) de un matriz A cuyo polinomio característico es $(l - 3)^3 (l + 4)$.

b) Determinar la forma canónica de Jordan J y una matriz de paso P para la siguiente matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 8 & -5 \end{pmatrix}$$

17.- Encontrar la forma canónica de Jordan J y la matriz del cambio de base P de la siguiente matriz A. Dar la relación existente entre las tres matrices.

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$$

18.- Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

a) ¿Es A diagonalizable ortogonalmente? Justifica la respuesta
b) Da la forma canónica de Jordan J de la matriz A y una matriz de cambio de base ortogonal Q.
c) Indica, sin realizar los cálculos, cómo podrías obtener A usando las matrices J y Q calculadas en el apartado anterior.

19.- Encontrar la forma canónica de Jordan J y la matriz del cambio de base P de la siguiente matriz A. Dar la relación existente entre las tres matrices.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

20.- Responder justificadamente a las siguientes cuestiones:

a) ¿Para qué valores de a es diagonalizable la matriz siguiente?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix}$$

b) Sean los vectores $\overline{u} = (1,0,0), \overline{v} = (4,-2,0), \overline{w} = (1,1,5)$ de $\mathbf{R}^3$, aplicar el proceso de ortogonalización de Gram-Smidt a estos tres vectores para obtener tres vectores ortonormales de $\mathbf{R}^3$.

c) Sabiendo que el polinomio característico de una matriz 3x3 M es $P(l) = l(l-2)(l-4)$ y que los espacios de autovectores son $V_1(0) = L\{(-1,0,1)\}, V_1(2) = L\{(0,1,0)\}, V_1(4) = L\{(1,0,3)\}$. Encontrar una expresión para las potencias de M, M^k.

21.- Dada la siguiente matriz

$$\text{A}=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

Calcular sus autovalores y autovectores., dar su forma canónica de Jordan J y la matriz de cambio de base P.

.

22.- Sea A una matriz simétrica 3×3 cuyos autovalores son -3 con multiplicidad 2 y 6 con multiplicidad 1. Sabemos que los correspondientes subespacios de autovectores son:

$$V_1(-3) = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : x+y+z=0\}; \quad V_1(6) = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : x-y=0, x-z=0\}$$

a) ¿Es A diagonalizable ortogonalmente?
b) Da la forma canónica de Jordan J de la matriz A y una matriz de cambio de base ortogonal Q.

c) Indica, sin realizar los cálculos, cómo podrías obtener A usando las matrices J y Q calculadas en el apartado anterior.