

Algoritmo de la forma canónica de Jordan

Input: $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(K)$, donde $K = \mathbb{R}$ o \mathbb{C} .

Output: $J, C \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{C})$ tal que $C^{-1}AC = J$, siendo J una matriz de Jordan (*forma canónica compleja de A*) y C una matriz de cambio de base.

PASO 1. Calculamos los *autovalores de A* :

Las raíces del polinomio $\det(A - tI) = 0$ con sus multiplicidades.

Sean $\lambda_1, \dots, \lambda_s \in \mathbb{C}$ estos autovalores con multiplicidades $m(\lambda_1), \dots, m(\lambda_s)$ respectivamente.

PASO 2. Para cada autovalor λ_i :

Calculamos *la cadena de autoespacios* $V_j(\lambda) = \text{Ker}(A - \lambda I)^j$, para $j = 1, 2, \dots$, que verifica:

$$V_1(\lambda) \subsetneq V_2(\lambda) \subsetneq \dots \subsetneq V_p(\lambda) = V_{p+1}(\lambda)$$

Obteniendo la siguiente cadena de rangos:

$$r_1 = \text{rg}(A - \lambda I) \geq r_2 = \text{rg}(A - \lambda I)^2 \geq \dots \geq r_p = \text{rg}(A - \lambda I)^p = n - m(\lambda)$$

A $V_p(\lambda)$ lo llamaremos el *autoespacio máximo asociado a λ* .

PASO 3. Elegimos $k_p = r_{p-1} - r_p$ (diferencia entre las dimensiones de $V_p(\lambda)$ y $V_{p-1}(\lambda)$) vectores linealmente independientes en $V_p(\lambda) - V_{p-1}(\lambda)$.

Para cada $j = 1, \dots, k_p$ construimos el conjunto de p vectores,

$$B_p^i(\lambda) = \{(A - \lambda I)^{p-1}\bar{u}_i, (A - \lambda I)^{p-2}\bar{u}_i, \dots, (A - \lambda I)\bar{u}_i, \bar{u}_i\}$$

que es un sistema linealmente independiente de vectores cuyas imágenes nos dan una caja elemental de Jordan de orden p con autovalor λ .

Como realizamos esta operación para cada $i = 1, \dots, k_p$, al final tendremos k_p *cajas de Jordan de orden p de autovalor λ* y un sistema de $p \cdot k_p$ vectores $B_p^1(\lambda) \cup \dots \cup B_p^{k_p}(\lambda)$ que será una parte de la base que estamos construyendo.

PASO 4. Se eligen $k_{p-1} = r_{p-2} - r_{p-1} - k_p$ vectores linealmente independientes en $V_{p-1} - V_{p-2}$ que sean a su vez linealmente independientes con el sistema $B_p^1(\lambda) \cup \dots \cup B_p^{k_p}(\lambda)$. Procediendo como en el **PASO 3** (es decir, hacemos las imágenes sucesivas de cada uno de estos mediante $(A - \lambda I)$) obtenemos k_{p-1} *cajas de Jordan de orden $p - 1$ con autovalor λ* y un sistema de $(p-1)k_{p-1}$ vectores que será otra parte de la base que estamos construyendo.

PASO 5. Se continua realizando el procedimiento descrito en **PASO 4** hasta llegar a $V_1(\lambda)$ en donde se eligen, si es posible, los vectores necesarios para que junto con todos los anteriores se tenga una base $B(\lambda)$ del autoespacio máximo $V_p(\lambda)$.

Número y dimensión de las cajas de Jordan

Sea $\lambda \in \mathbb{C}$ un autovalor de una matriz $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{C})$ con multiplicidad algebraica m . Tenemos entonces la cadena de rangos:

$$n \geq r_1 = \text{rg}(A - \lambda I) \geq r_2 = \text{rg}(A - \lambda I)^2 \geq \dots \geq r_p = \text{rg}(A - \lambda I)^p = n - m(\lambda)$$

Y puesto que $\dim V_j(\lambda) = n - r_j$. Vamos a denotar por $h_j = \dim V_j(\lambda) - \dim V_{j-1}(\lambda)$ la diferencia de dimensiones entre dos autoespacios $V_j(\lambda)$ sucesivos. Con lo cual obtenemos:

$$\begin{aligned} h_1 &= n - r_1 \\ h_2 &= r_1 - r_2 \\ &\vdots \\ h_{p-1} &= r_{p-2} - r_{p-1} \\ h_p &= r_{p-1} - r_p \end{aligned}$$

Además, se tiene trivialmente que $h_1 + h_2 + \dots + h_p = n$.

Entonces, la forma canónica de Jordan de A contiene para el autovalor λ :

$$\begin{array}{lll} k_p &= h_p & \text{cajas de Jordan de dimensión } p. \\ k_{p-1} &= h_{p-1} - h_p & \text{cajas de Jordan de dimensión } p - 1. \\ &\vdots & \vdots \\ k_2 &= h_2 - h_3 & \text{cajas de Jordan de dimensión } 2. \\ k_1 &= h_1 - h_2 & \text{cajas de Jordan de dimensión } 1. \end{array}$$

Posibles formas de Jordan de una matriz 3×3

Sea A una matriz 3×3 real o compleja. Tenemos las siguientes posibilidades para sus autovalores complejos:

1. Tres autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ distintos. Entonces, $m(\lambda_i) = 1$ y $r_1(\lambda_i) = 2 (= n - m(\lambda_i))$, para $i = 1, 2, 3$. Luego, la forma de Jordan J contendrá una caja de Jordan de orden 1 para cada autovalor.

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

2. Dos autovalores λ_1, λ_2 distintos. Entonces, $m(\lambda_1) = 1$ y $r_1(\lambda_i) = 2 (= n - m(\lambda_1))$. Luego, J contiene una caja de Jordan de orden 1 para el autovalor λ_1 . Y $m(\lambda_2) = 2$, lo que nos da 2 posibilidades:

2.1. $r_1(\lambda_2) = 1 (= n - m(\lambda_2))$. Entonces, $p = 1$ y $k_1 = h_1 = 3 - 1 = 2$, luego J contiene dos cajas de orden 1 para el autovalor λ_2 . Así,

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

2.2. $r_1(\lambda_2) = 2 (\neq n - m(\lambda_2))$, entonces $r_2(\lambda_2) = 1 (= n - m(\lambda_2))$. Por lo tanto, $p = 2$, $h_1 = 3 - 2 = 1$, $h_2 = 2 - 1 = 1$ y $k_2 = 1$, $k_1 = 0$, luego J contiene una caja de orden 2 para el autovalor λ_2 . Así,

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

3. Un autovalor λ . Entonces, $m(\lambda) = 3$ y tenemos las siguientes posibilidades para $r_1(\lambda)$:

3.1. $r_1(\lambda) = 0$, luego $\dim(V_1(\lambda)) = 3$. Entonces, $p = 1$ y $h_1 = k_1 = 3 - 0 = 3$, con lo que J contiene tres cajas de orden 1. Así,

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

3.2. $r_1(\lambda) = 1$, luego $\dim(V_1(\lambda)) = 2$. Entonces $r_2 = 0 (= n - m)$ y $p = 2$. Entonces, $h_1 = 3 - 1 = 2$, $h_2 = 1 - 0 = 1$ y $k_2 = 1$, $k_1 = 1$. Por tanto J contiene una caja de orden 2 y una caja de orden 1. Así,

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

3.3. $r_1(\lambda) = 2$, luego $\dim(V_1(\lambda)) = 1$. Tenemos dos posibilidades para $r_2(\lambda)$:

3.3.1. $r_2(\lambda) = 1$, luego $r_3(\lambda) = 0 (= n - m)$. Entonces, $p = 3$, $h_1 = 1$, $h_2 = 1$, $h_3 = 1$ y $k_3 = 1$, $k_2 = 0$, $k_1 = 0$. Por tanto J contiene una caja de orden 3. Así,

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

3.3.2. $r_2(\lambda) = 0 (= n - m)$. Entonces, $p = 2$, $h_1 = 1$, $h_2 = 2$ y $k_2 = 1$, $k_1 = 1$. Por tanto J contiene una caja de orden 2 y una caja de orden 3. Así,

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$