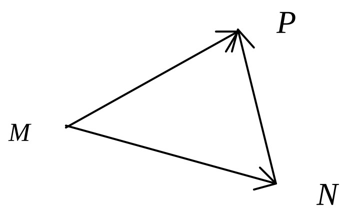
ESPACIO AFÍN

Definición: Un *espacio afín* $\mathbb{A}$ es un par (? , V), donde ? es un conjunto (cuyos elementos se denominan puntos) y V es un espacio vectorial, de modo que todo par de elementos $M, N \in$? se corresponden con un único vector $\overline{v} \in V$ (escribiremos $\overline{v} = \overline{MN}$) satisfaciendo las siguientes propiedades:

1) Para todo punto $M \in$? y todo vector $\overline{v} \in V$ existe un único $N \in$? tal que $\overline{v} = \overline{MN}$ (entonces $N = M + \overline{v}$).
2) Para cada tres puntos $M, N, P \in$? se tiene $\overline{MN} + \overline{NP} = \overline{MP}$



Observación: En muchos casos el conjunto de puntos ? de un espacio afín y el conjunto que subyace al espacio vectorial V son el mismo, lo cual puede conducir a una cierta confusión. Sin embargo hay que tener en cuenta que lo que los diferencia es la estructura.

Por ejemplo, $\mathbb{R}^2$ como espacio afín es el conjunto de puntos del plano real, mientras que $\mathbb{R}^2$ como espacio vectorial es el conjunto de vectores con origen fijo en (0,0).

Definición: La *dimensión de un espacio afín* $\mathbb{A}$ = (? , V) es la dimensión del espacio vectorial V.

Definición: Una *variedad lineal* (o subespacio afín) de un espacio afín $\mathbb{A}$ = (? , V) es un subconjunto de ? de la forma $P+V_1$ donde V_1 es un subespacio vectorial de V.

SISTEMAS DE REFERENCIA AFÍN

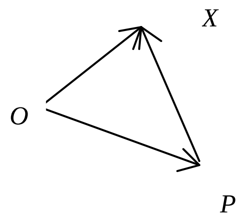
Definición: Un *sistema de referencia* de un espacio afín $\mathbb{A}$ = (? , V) de dimensión n es un conjunto $R = \{O; \overline{e}_1, ..., \overline{e}_n\}$ donde $O \in$? que llamamos origen del sistema de referencia y $\{\overline{e}_1, ..., \overline{e}_n\}$ es una base de V.

Las *coordenadas* de un punto $P \in$? son las coordenadas del vector $\overline{p} = \overline{OP}$ en la base $\{\overline{e}_1, ..., \overline{e}_n\}$ de V.

Cambio de sistema de referencia:

Sean $R=\{O;\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3\}$, $S=\{P;\bar{v}_1,\bar{v}_2,\bar{v}_3\}$ dos sistemas de referencia de un espacio afín A. Sea X un punto de A y supongamos que las coordenadas de X en el sistema R son $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, es decir $\overline{OX}=x_1\bar{e}_1+x_2\bar{e}_2+\cdots+x_n\bar{e}_n$; y las coordenadas de X en sistema sistema S son $(x_1',x_2',\ldots,x_n')$, es decir $\overline{PX}=x_1'\bar{v}_1+x_2'\bar{v}_2+\cdots+x_n'\bar{v}_n$.
Para encontrar las ecuaciones del cambio de sistema de referencia procedemos en dos pasos, teniendo en cuenta lo siguiente:

$$\overline{PX}=\overline{OX}-\overline{OP}$$



1) Cambiamos el origen del sistema R considerando un nuevo sistema $R'=\{P;\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3\}$. Así, si $(p_1,p_2,\ldots,p_n)$ son las coordenadas de P en el sistema R, es decir

$$\overline{OP}=p_1\bar{e}_1+p_2\bar{e}_2+\cdots+p_n\bar{e}_n;$$

entonces, $\overline{PX}=\overline{OX}-\overline{OP}=(x_1,\ldots,x_n)-(p_1,\ldots,p_n)=(x_1-p_1,\ldots,x_n-p_n)$ tiene coordenadas $(x_1-p_1,\ldots,x_n-p_n)$ en la base $\{\bar{e}_1,\ldots,\bar{e}_n\}$. Luego $(x_1-p_1,\ldots,x_n-p_n)$ son las coordenadas de X en el sistema $R'=\{P;\bar{e}_1,\ldots,\bar{e}_n\}$.

2) Ahora tenemos los sistemas R' y S con el mismo origen P, con lo cual podemos realizar un cambio de base en el espacio vectorial V. Sea $A=(a_{ij})$ la matriz del cambio de base de $\{\bar{e}_1,\ldots,\bar{e}_n\}$ a $\{\bar{v}_1,\ldots,\bar{v}_n\}$, es decir

$$\bar{v}_1=a_{11}\bar{e}_1+a_{21}\bar{e}_2+\cdots+a_{n1}\bar{e}_n$$
$$\cdots$$
$$\bar{v}_n=a_{1n}\bar{e}_1+a_{2n}\bar{e}_2+\cdots+a_{nn}\bar{e}_n$$

Entonces,

$$\boxed{\begin{pmatrix} x_1-p_1 \\ \vdots \\ x_n-p_n \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}}$$

son las ecuaciones del cambio de sistema de referencia.