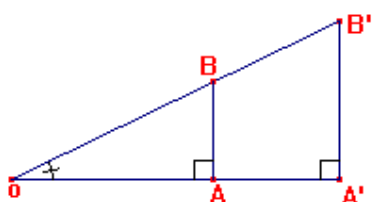




Repaso de Trigonometría

Razones trigonométricas en un triángulo:

Las funciones trigonométricas se originaron históricamente como relaciones entre las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo. Denotemos por α el ángulo AOB , a continuación definimos las funciones trigonométricas *seno*, *coseno*, *tangente*, *cotangente*, *secante* y *cosecante* del ángulo α :



$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{AB}{OB} = \frac{A'B'}{OB'}$$

$$\operatorname{cos} \alpha = \frac{OA}{OB} = \frac{OA'}{OB'}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{AB}{OA} = \frac{A'B'}{OA'}$$

$$\operatorname{cotg} \alpha = \frac{OA}{AB} = \frac{OA'}{A'B'}$$

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{OB}{AB} = \frac{OB'}{A'B'}$$

$$\operatorname{sec} \alpha = \frac{OB}{OA} = \frac{OB'}{OA'}$$

Razones trigonométricas de algunos ángulos:

α (radianes)	α (grados)	$\operatorname{sen} \alpha$	$\operatorname{cos} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$
0	0	0	1	0
$\pi/6$	30°	1/2	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$
$\pi/4$	45°	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1
$\pi/3$	60°	$\sqrt{3}/2$	1/2	$\sqrt{3}$
$\pi/2$	90°	1	0	No existe

Identidades entre las razones trigonométricas:

1) Identidades recíprocas:

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha} \quad \operatorname{sec} \alpha = \frac{1}{\operatorname{cos} \alpha} \quad \operatorname{cotg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$$

2) Identidades tangente y cotangente:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{cos} \alpha} \quad \operatorname{cotg} \alpha = \frac{\operatorname{cos} \alpha}{\operatorname{sen} \alpha}$$

3) Identidades de Pitágoras:

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{cos}^2 \alpha = 1; \quad 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \operatorname{sec}^2 \alpha; \quad 1 + \operatorname{cotg}^2 \alpha = \operatorname{cosec}^2 \alpha$$

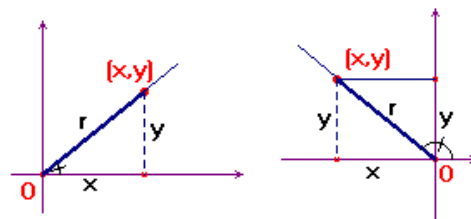


Funciones trigonométricas:

Para definir las razones trigonométricas hemos trabajado sobre triángulos rectángulos, por lo tanto sobre ángulos agudos (menores de 90°). No obstante, las definiciones anteriores se pueden generalizar a cualquier ángulo α como sigue:

Elegimos un punto arbitrario $P = (x, y)$ en el plano de modo que la semirecta OP forme un ángulo α con el eje de las x , así α queda en posición estandar. Denotemos por $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ la distancia de O a P entonces

$$\boxed{\text{sen } \alpha = \frac{y}{r} \quad \text{cos } \alpha = \frac{x}{r} \quad \text{tg } \alpha = \frac{y}{x}}$$

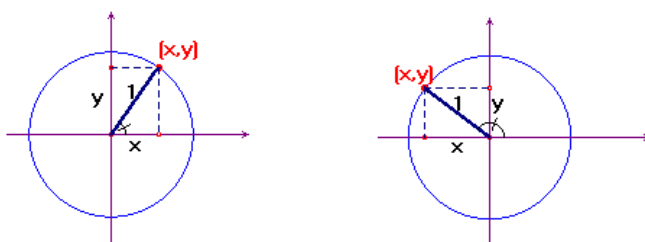


De este modo tenemos definidas las funciones *seno*, *coseno* y *tangente* de cualquier valor real y usando las identidades trigonométricas recíprocas podemos definir *secante*, *cosecante* y *cotangente*.

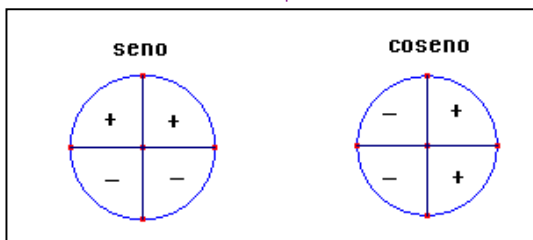
Definición de las funciones trigonométricas sobre el círculo unidad:

El punto arbitrario $P = (x, y)$ del plano que hemos utilizado para definir seno, coseno y tangente de α se puede elegir de modo unívoco si nos restringimos a la circunferencia de radio 1 con centro el origen O . Además, para cualquier punto de la circunferencia unidad $r = \sqrt{x^2 + y^2} = 1$; con lo cual, cuando P pertenece a la circunferencia unidad tenemos

$$\boxed{\text{sen } \alpha = y \quad \text{cos } \alpha = x \quad \text{tg } \alpha = \frac{y}{x}}$$



Signo de las funciones trigonométricas:



Observación:

$$\boxed{\begin{aligned} \text{sen } \alpha &= \text{sen}(\alpha + 2\pi) = \text{sen}(\alpha + 4\pi) = \dots = \text{sen}(\alpha + 2k\pi) \\ \text{cos } \alpha &= \text{cos}(\alpha + 2\pi) = \text{cos}(\alpha + 4\pi) = \dots = \text{cos}(\alpha + 2k\pi) \end{aligned}}$$



Reducción al primer cuadrante:

$$\begin{array}{llll} \operatorname{sen}(\pi - \alpha) = \operatorname{sen} \alpha & \operatorname{sen}(\pi + \alpha) = -\operatorname{sen} \alpha & \operatorname{sen}(2\pi - \alpha) = -\operatorname{sen} \alpha & \operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen} \alpha \\ \operatorname{cos}(\pi - \alpha) = -\operatorname{cos} \alpha & \operatorname{cos}(\pi + \alpha) = -\operatorname{cos} \alpha & \operatorname{cos}(2\pi - \alpha) = \operatorname{cos} \alpha & \operatorname{cos}(-\alpha) = \operatorname{cos} \alpha \\ \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{cos} \alpha & \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \operatorname{cos} \alpha & \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\operatorname{cos} \alpha & \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\operatorname{cos} \alpha \\ \operatorname{cos}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{sen} \alpha & \operatorname{cos}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\operatorname{sen} \alpha & \operatorname{cos}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\operatorname{sen} \alpha & \operatorname{cos}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \operatorname{sen} \alpha \end{array}$$

Fórmulas de los ángulos suma, resta, doble y mitad:

$$\begin{array}{ll} \operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen} \alpha \operatorname{cos} \beta + \operatorname{sen} \beta \operatorname{cos} \alpha & \operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen} \alpha \operatorname{cos} \beta - \operatorname{sen} \beta \operatorname{cos} \alpha \\ \operatorname{cos}(\alpha + \beta) = \operatorname{cos} \alpha \operatorname{cos} \beta - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta & \operatorname{cos}(\alpha - \beta) = \operatorname{cos} \alpha \operatorname{cos} \beta + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta \\ \operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} & \operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} \\ \operatorname{sen}(2\alpha) = 2 \operatorname{sen} \alpha \operatorname{cos} \alpha & \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \operatorname{cos} \alpha}{2}} \\ \operatorname{cos}(2\alpha) = \operatorname{cos}^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha & \operatorname{cos} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \operatorname{cos} \alpha}{2}} \\ \operatorname{tg}(2\alpha) = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} & \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \operatorname{cos} \alpha}{1 + \operatorname{cos} \alpha}} \end{array}$$

Fórmulas del seno y el coseno en función de la tangente del ángulo mitad: Sea $t = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{2t}{1+t^2} \quad \operatorname{cos} \alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

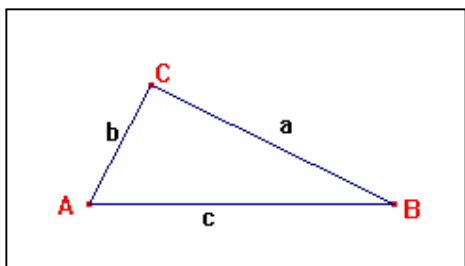
Transformación de sumas en productos:

$$\begin{array}{ll} \operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \beta = 2 \operatorname{sen} \frac{\alpha + \beta}{2} \operatorname{cos} \frac{\alpha - \beta}{2} & \operatorname{sen} \alpha - \operatorname{sen} \beta = 2 \operatorname{sen} \frac{\alpha - \beta}{2} \operatorname{cos} \frac{\alpha + \beta}{2} \\ \operatorname{cos} \alpha + \operatorname{cos} \beta = 2 \operatorname{cos} \frac{\alpha + \beta}{2} \operatorname{cos} \frac{\alpha - \beta}{2} & \operatorname{cos} \alpha - \operatorname{cos} \beta = -2 \operatorname{sen} \frac{\alpha - \beta}{2} \operatorname{sen} \frac{\alpha + \beta}{2} \end{array}$$



Algunas aplicaciones de la trigonometría

- Resolución de triángulos: Teoremas del seno y el coseno**



Hasta el momento sabemos relacionar mediante las razones trigonométricas ángulos y lados de un triángulo rectángulo. Los siguientes teoremas nos proporcionan relaciones para cualquier triángulo.

Considérese un triángulo de vértices A, B, C y lados de longitud a, b, c . Denotemos también por A, B y C los ángulos que corresponden a los vértices A, B y C respectivamente

Teorema del seno:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}$$

En todo triángulo las longitudes de los lados son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos.

Teorema del coseno:

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C \end{aligned}$$

Estos teoremas nos servirán para *resolver triángulos* (es decir, calcular sus tres ángulos y las longitudes de sus tres lados). Para ello debemos conocer los valores de tres de estos datos.

Usaremos el teorema del seno cuando conozcamos:

- dos lados y un ángulo opuesto a ellos
- dos ángulos y cualquier lado.

Usaremos el teorema del coseno cuando conozcamos:

- dos lados y el ángulo entre ellos
- tres lados

- Números complejos: $\mathbf{C} = \{z = x + iy : x, y \in \mathbf{R}\}$**

Forma trigonométrica de un número complejo $z = x + iy$:

$$z = r(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha) \text{ donde } r = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ y } \operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}, \alpha \in [0, 2\pi)$$

A r se le llama módulo de z y a α argumento de z .



Multiplicación y división en forma trigonométrica:

Sean $z_1 = r_1(\cos \alpha_1 + i \operatorname{sen} \alpha_1)$ y $z_2 = r_2(\cos \alpha_2 + i \operatorname{sen} \alpha_2)$, entonces

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\alpha_1 + \alpha_2) + i \operatorname{sen}(\alpha_1 + \alpha_2))$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\alpha_1 - \alpha_2) + i \operatorname{sen}(\alpha_1 - \alpha_2)), \quad z_2 \neq 0$$

Potencias de un número complejo:

$$[r(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)]^n = r^n (\cos(n\alpha) + i \operatorname{sen}(n\alpha))$$

Raíces n-ésimas de un número complejo:

Sea $z = r(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)$ un número complejo no nulo, entonces para cualquier entero positivo n , z tiene exactamente n raíces n-ésimas w_0, w_1, \dots, w_{n-1} (es decir, $w_k^n = z, k = 0, 1, \dots, n-1$) y w_k se obtiene como sigue:

$$w_k = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{\alpha + 2k\pi}{n} \right), \text{ para } k = 0, 1, \dots, n-1$$