



ESPACIOS EUCLÍDEOS

1.- ¿Cuáles de las siguientes funciones $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ definen un producto escalar en \mathbf{R}^2 ?

- $\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = x_1 y_1 + 2x_2 y_2 + 2y_1 x_2 - 3x_1 y_2$
- $\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = x_1 y_1 - x_2 y_2$
- $\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = x_1 y_1 + 2x_1 y_2 + 3y_1 x_2 + 7x_2 y_2$
- $\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = x_1 y_1 + 2x_2 y_2 + 3y_2 x_1 + 3x_2 y_1$
- $\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = 2x_1 y_1 + 3x_2 y_2 + 2y_2 x_1 + 2x_2 y_1$

2.- (*Desigualdad de Schwarz*) Demostrar que en un espacio euclídeo E con un producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$ se verifica que

$$\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle \leq \|\bar{x}\| \cdot \|\bar{y}\|$$

para todo $\bar{x}, \bar{y} \in E$. Expresar la desigualdad anterior con el producto escalar usual de \mathbf{R}^n .

3.- Demostrar que en el espacio euclídeo $C([-\pi, \pi])$ de funciones reales continuas en el intervalo $[-\pi, \pi]$ los vectores $1, \cos t, \sin t, \cos 2t, \sin 2t$ son ortogonales entre si.

4.- Dados $x_1 = (1,0,0)$, $x_2 = (4,-2,0)$ y $x_3 = (1,1,5)$ en \mathbf{R}^3 , construir los vectores ortonormales y_1, y_2 e y_3 por el método de ortogonalización de Gramm-Schmidt.

5.- Sean $u_1 = (1,2,0,0)$, $u_2 = (1,0,0,2)$ y $u_3 = (1, -1, -1,2)$ tres vectores de \mathbf{R}^4 . Sea $W = L\{u_1, u_2, u_3\}$ el subespacio generado por u_1, u_2, u_3 .

- Encontrar una base ortonormal de W .
- Ampliar la base encontrada en a) a una base ortonormal de \mathbf{R}^4 .

6.- Dos subespacios W_1 y W_2 de un espacio euclídeo E son ortogonales si todo vector de W_1 es ortogonal a todo vector de W_2 . En este caso escribiremos $W_1 \perp W_2$. Demostrar que:

- $W_1 \perp W_2$ son ortogonales si y sólo si todos los vectores de una base de W_1 son ortogonales a cada uno de los vectores de una base de W_2 .
- Si $W_1 \perp W_2$, entonces $W_1 \cap W_2 = \{0\}$.

7.- Demostrar que las siguientes aplicaciones lineales son simétricas o autoadjuntas y dar una diagonalización en una base ortonormal.

- $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2, f(x,y) = (2x+y, 2y+x)$
- $f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3, f(x,y,z) = (y+z, x+z, x+y)$

8.- Demostrar que cualquier giro en \mathbf{R}^2 con centro el origen de coordenadas es un aplicación ortogonal.