REDUCCIÓN DE GAUSS Y SISTEMAS LINEALES

1.- Decidir si la siguiente matriz está en forma escalonada. En caso negativo, obtener su forma escalonada REF.

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 7 & 3 & -3 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 10 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

2.- Reducir las siguientes matrices a su forma escalonada reducida RREF

$$\text{a)}\ A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 7 & 3 & -3 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix};\quad \text{b)}\ B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 11 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 2 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix};\quad \text{c)}\ C=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix};$$

$$\text{d)}\ D=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix};\quad \text{e)}\ E=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 20 & 3 & 17 \end{pmatrix};\quad \text{f)}\ F=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3.- Encontrar una forma REF de cada una de las siguientes matrices y determinar su rango:

$$\text{a)}\ A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix};\qquad \text{b)}\ B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

4.- En el cálculo de la forma REF de una matriz $(A|b)$ un alumno obtiene $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, mientras que su compañero ha obtenido $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 8 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -14 \end{pmatrix}$ para la misma matriz.

a) Explica qué ha sucedido. ¿Alguno de los dos se ha podido confundir?
b) Resolver los dos sistemas lineales a que dan lugar.

5.- Sean $A=\begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $r=\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ a \\ b \end{pmatrix}$ y $B = (A\,|\,r)$. Se pide:

a) ¿Depende de a o de b el rango de B?. Calcular este rango.

b) ¿Para qué valores de a, b es compatible el sistema $A\cdot \overline{x} = r$? En estos casos, deescribir en forma paramétrica todas las soluciones.

6.- Resolver el siguiente sistema y comprobar luego la solución:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -11 \\ 2 & 6 & -6 & 2 \\ 0 & 2 & -4 & -4 \\ -2 & 2 & -7 & -8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -11 \\ 18 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$$

7.- Resolver el siguiente sistema mediante reducción a forma escalonada de la matriz ampliada, marcando las variables libres y los pivotes.

$$\begin{aligned} &2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_5 = 2 \\ &-x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 + x_5 = -1 \\ &x_1 + x_2 - 2x_3 - x_5 = -2 \\ &x_3 + x_4 + x_5 = 3 \end{aligned}$$

8.- ¿Para qué valores de k tiene solución el sistema $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & k \\ 2k & 2k & 2k^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ k \end{pmatrix}$?

¿Para cuáles tiene solución única? ¿Para cuáles no tiene solución?
En aquellos casos que tenga solución, calcular ésta.

9.- Sea $T:\mathbf{R}^6 \to \mathbf{R}^4$ definida por $T(\overline{x})=\begin{pmatrix} x_1 - x_3 + 2x_5 \\ -x_4 + x_5 \\ 0 \\ -x_6 \end{pmatrix}$. Se pide:

a) ¿Por qué es T aplicación lineal?

b) Encontrar la matriz asociada a T en la base canónica y calcular su rango.

c) ¿Es posible encontrar dos vectores $\overline{x} \neq \overline{y}$ de $\mathbf{R}^6$ de modo que $T(\overline{x}) = T(\overline{y})$?

10.- Si $A=\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $b=\begin{pmatrix} 34 \\ -22 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, resolver los siguientes sistemas lineales:

a) $A\cdot \overline{x} = b$; b) $A\cdot \overline{y} = \overline{y}$; c) $A\cdot \overline{z} = -\overline{z} + 2b$