VECTORES, APLICACIONES LINEALES Y MATRICES

1.- Revisa las siguientes aplicaciones de $\mathbf{R}^n$ en $\mathbf{R}^m$, comprobando si cada una de sus componentes es lineal e indicando en cada caso cuáles son lineales. Determina en cada una los valores de n y m.

a) $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3z - x \\ \cos(1)\cdot|x-x| \\ 2y + x - 1 \\ x^3 \end{pmatrix}$ b) $R(\overline{x}) = \begin{pmatrix} x_1 - 3x_5 + 20x_2 \\ (x_5 - 2x_5)^4 \\ x_2x_3 - (x_4 + x_3)x_2 + x_4x_2 \\ (x_2 - x_1)(x_5 + x_5) \\ \operatorname{sen}(0) \end{pmatrix}$

2.- Considérese la función $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ definida por

$$f(\overline{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \cdot \overline{x} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \overline{x}$$

a) ¿Es *f* lineal? Si es así, ¿cuál sería la matriz asociada a *f* en la base canónica?
b) Analizando el apartado a), ¿podrías decir algo sobre la linearidad de la suma de aplicaciones lineales? ¿y sobre su matriz asiciada?

3.- Considérese la siguiente transformación lineal de $\mathbf{R}^3$ $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - 2y + z \\ y - x \\ 2x + 3z \end{pmatrix}$. Hallar la matriz asociada en la base canónica.

4.- Sea $f : \mathbf{R}^6 \to \mathbf{R}^4$, definida por $f(\overline{x}) = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 + x_3 \\ 3x_2 + x_4 \\ 0 \\ -x_6 \end{pmatrix}$. Se pide:

a) Comprobar que *f* es una aplicación lineal.
b) Hallar $f(\overline{e}_1), f(\overline{e}_2), f(\overline{e}_3), f(\overline{e}_4), f(\overline{e}_5), f(\overline{e}_6)$.
c) ¿Cuáles son las dimensiones de la matriz asociada en la base canónica?
d) Dar la matriz asociada en la base canónica.

5.- Sea $f : \mathbf{R}^6 \to \mathbf{R}^4$, definida por $f(\overline{x}) = \begin{pmatrix} -4x_1 + 2x_2 + x_3 \\ 3x_2 - x_4 \\ 1 \\ -x_6 \end{pmatrix}$. Se pide:

a) Calcular $f(\overline{e}_1), f(\overline{e}_2), f(\overline{e}_3), f(\overline{e}_4), f(\overline{e}_5), f(\overline{e}_6)$ y $f(\overline{0})$.
b) Intenta hallar la matriz asociada a *f* en la base canónica.
c) ¿Es *f* lineal?

6.- Sea $f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ una transformación lineal. Encontrar la matriz asociada en la base canónica, en los siguientes casos:

a) $f(\overline{e}_3) = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 17 \end{pmatrix}, f(\overline{e}_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix}, f(\overline{e}_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}$

b) $f(3\overline{e}_1) = \overline{e}_1,\ f(2\overline{e}_3) = \begin{pmatrix} 52 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix}, f(-\overline{e}_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) $f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, f\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, f\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$

7.- Considérense los siguientes seis vectores de $\mathbf{R}^3$:

$\overline{u}_1 = \overline{e}_1,\ \overline{u}_2 = \overline{e}_1 + \overline{e}_2,\ \overline{u}_3 = \overline{e}_2 - \overline{e}_3, \overline{v}_1 = \overline{e}_1 + \overline{e}_2, \overline{v}_2 = \overline{e}_1 - \overline{e}_2,\ \overline{v}_3 = \overline{e}_1$

a) Hallar la matriz asociada en la base canónica de la transformación de $\mathbf{R}^3$ definida por: $f(\overline{u}_1) = \overline{v}_1,\ f(\overline{u}_2) = \overline{v}_2,\ f(\overline{u}_3) = \overline{v}_3$

b) Hallar la matriz asociada en la base canónica de la transformación de $\mathbf{R}^3$ definida por: $f(\overline{u}_1) = \overline{v}_1,\ f(\overline{u}_2) = \overline{v}_3,\ f(\overline{u}_3) = \overline{v}_2$

8.- Sea $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ una transformación lineal que lleva el (4,1) al (-3,5) y el (5,-1) al (-3,1). Se pide: a) Hallar $f(\overline{e}_1), f(\overline{e}_2)$ y dar la matriz asociada en esta.

b) Encontrar un vector $\overline{x} = (x, y)$ de modo que $f(\overline{x}) = 0$

9.- Hallar la matriz asociada en la base canónica para las siguientes aplicaciones:

a) La proyección f de $\mathbf{R}^3$ en el plano horizontal, $f(x, y, z) = (x, y, 0)$.
b) La reflexión de $\mathbf{R}^3$ con respecto al plano yz, $f(x, y, z) = (x, -y, z)$.
c) La rotación de 90º en el sentido de las agujas del reloj en $\mathbf{R}^2$.
d) La rotación de 60º en el sentido opuesto a las agujas del reloj en $\mathbf{R}^2$.

10.- Si f, g: $\mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ son aplicaciones lineales, comprobar que, dados $\alpha, b \in \mathbf{R}$, la aplicación $\alpha f + b\, g : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$, definida como $\alpha f + b\, g(\overline{x}) = \alpha f(x) + b\, g(\overline{x})$ es también lineal.