



**PRÁCTICA CON Matlab**

Alumno:

Grupo:

**NOTA:** Da la respuesta a las cuestiones en los recuadros. Añade impresa la sesión de MatLab en que hayas realizado los cálculos para resolver cada ejercicio.

**1.- Sistemas de ecuaciones:**

a) Sean las matrices  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & 0 \\ -3 & -6 & 12 & 2 \\ 1 & 2 & -2 & -4 \end{pmatrix}$  y  $b = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -12 \\ 3 \end{pmatrix}$ . Comprobar que el sistema lineal cuya matriz ampliada es  $(A \ b)$  no tiene solución.

b) Sea ahora  $c = 2 * A(:, 1) + A(:, 2) + 3 * A(:, 3) - 4 * A(:, 4)$ . Recuerda r que  $A(:, 1)$  es la primera columna de  $A$ . Usar el comando **rref([A c])** para resolver el sistema cuya matriz ampliada es  $(A \ c)$ .

Solución:

c) Modificar de nuevo la columna de términos independientes, obteniendo así una nueva matriz de términos independientes  $d$ . Resolver el sistema cuya matriz ampliada es  $(A \ d)$ .

Solución:

d) ¿Sería posible de este modo, es decir cambiando la columna de términos independientes por combinaciones de las columnas de  $A$ , obtener una columna de términos independientes para la cual el sistema de matriz de coeficientes  $A$  no tenga solución? ¿Por qué?

**2.-** MatLab es un programa que nos muestra los cálculos con distinta precisión decimal con fracciones e incorpora un “toolbox” de cálculo. En esta práctica vamos a resolver un sistema lineal en modo racional y también usando distintas precisiones decimales.

a) Calcular de modo exacto el determinante de  $A$  y la solución del sistema lineal homogéneo cuya matriz de coeficientes es  $A$ , siendo



$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 & 1/6 \\ 1/4 & 1/5 & 1/6 & 1/7 \end{pmatrix}$$

*Sugerencia:* Introducir los elementos de  $A$  como fracciones y activar el comando **format rational** de MatLab antes de hacer los cálculos.

Det(A) =

Solución sistema

b) Activar el comando **format short** y realizar los mismos cálculos del apartado A.

Det(A) =

Solución sistema

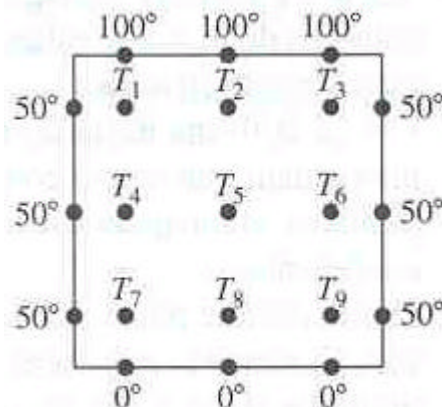
c) Activar el comando **format long** y realizar los mismos cálculos del apartado A.

Det(A) =

Solución sistema

d) ¿Qué diferencias observas entre los resultados obtenidos en los apartados anteriores?

3.- **Una aplicación: distribución de calor:** Se tiene una placa rectangular cuyas orillas se mantienen a cierta temperatura. Se tiene interés en encontrar la temperatura en los puntos interiores conocida la temperatura en algunos puntos del borde. Considerar el siguiente diagrama. Se quiere encontrar una aproximación de las temperaturas en los puntos intermedios  $T_1$  a  $T_9$ , suponiendo que la temperatura en un punto interior es el promedio de las temperaturas de los cuatro puntos que lo rodean –arriba, a la derecha, abajo y a la izquierda.



a) Usando las consideraciones anteriores establecer un sistema de ecuaciones que describa las temperaturas, comenzando por  $T_1$ , después  $T_2$ , etc. Por ejemplo para  $T_1$  se tiene



$$T_1 = \frac{100 + T_2 + T_4 + 50}{4}$$

Reordenando las ecuaciones se obtiene un sistema lineal. Encontrar la matriz de coeficientes  $A$  y la matriz ampliada ( $A \ b$ ).

$A =$

$b$

- b) Resolver el sistema usando el comando `rref`. ¿Cuántas soluciones obtienes? Asignar la solución a la variable  $x$ .

$x =$

- c) Dar el comando  $y = A \setminus b$  y comparar  $y$  con  $x$ . ¿Qué operación hemos realizado?

$y =$

#### 4.- Criptografía:

El mundo de las telecomunicaciones y las nuevas tecnologías de la información se interesa cada vez más por la transmisión de mensajes encriptados que sean difíciles de descifrar por otros, en caso de ser interceptados, pero que se decodifiquen con facilidad por quienes los reciben. Hay muchas formas interesantes de cifrar o encriptar mensajes, y en su mayor parte usan la teoría de números o el álgebra lineal. Describiremos aquí un método que es eficaz, en especial cuando se usa una matriz de gran tamaño. En los ejercicios trabajemos con matrices pequeñas para evitar grandes cálculos manuales.

Comenzaremos con una matriz  $M$  invertible, que sólo la conocen quienes la transmiten y quienes la reciben. Por ejemplo,

$$M = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Supongamos que se desea encriptar el mensaje:

ATTACK NOW

Reemplazamos cada letra por el número que le corresponde a su posición en el alfabeto (A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z) y representamos un espacio por 0.

El mensaje anterior se ha convertido en la sucesión de números 1, 20, 20, 1, 3, 11, 0, 14, 15, 23, que agrupamos en una sucesión de vectores columna

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 20 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 20 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 11 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 14 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 15 \\ 23 \end{bmatrix}$$

y multiplicamos por la izquierda a  $M$ :



$$M \cdot \begin{bmatrix} 1 & 20 & 3 & 0 & 15 \\ 20 & 1 & 11 & 14 & 23 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 77 & -56 & 35 & 56 & 47 \\ 39 & -18 & 19 & 28 & 31 \end{bmatrix}$$

Con lo que el mensaje cifrado que se enviará es 77, 39, -56, -18, 35, 19, 56, 28, 47, 31.

Para descifrar el mensaje quien lo recibe debe calcular  $M^{-1}$ ,

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1/2 & 3/2 \end{bmatrix}$$

y multiplicar por los números recibidos agrupados en una sucesión de vectores columna igual que antes, obtenemos el mensaje original

$$M^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 77 & -56 & 35 & 56 & 47 \\ 39 & -18 & 19 & 28 & 31 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 20 & 3 & 0 & 15 \\ 20 & 1 & 11 & 14 & 23 \end{bmatrix}$$

**Problema:** Para aquellos alumnos que estén cursando la asignatura de Matemáticas I, les voy a dar un breve pero importante consejo para poder aprobar la asignatura:

1,9,10,22,24,43,16,37,53,24,36,56,16,28,44,37,17,34,21,18,20,34,18,31,1,20,20,17,23,23

Para que este mensaje sea accesible a todos, solamente comentar que el mensaje ha sido encriptado basándose en el método anterior mediante la matriz

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

pero utilizando el alfabeto español (la misma asignación anterior, pero incluyendo nuestra querida Ñ y eliminando la W). Ayuda a tus compañeros y descifra el mensaje.

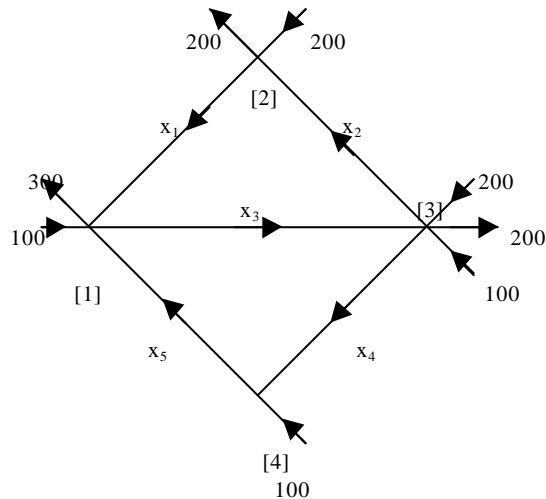
**Problema:** Un espía intercepta un mensaje enviado desde una base militar. El mensaje es

15 81 -9 39 -1 7 2 52 28 56 -12 18 32 100 -2 8 2 4 11 25 12 60 32 64 37 89  
-8 26 15 39 32 64 -9 21 4 14

El espía sabe que el mensaje ha sido encriptado con una matriz cuadrada  $2 \times 2$ , utilizando el alfabeto español como en el problema anterior. Además sospecha que al final del mensaje aparecen las siglas de la base: BMCB. Ayuda al espía a descifrar el mensaje.



**5.- Flujos de Tráfico:** Considere el siguiente diagrama de una malla de calles de un sentido con vehículos que entran y salen de las intersecciones. La intersección  $k$  se denota  $[k]$ . Las flechas a lo largo de las calles indican la dirección del flujo de tráfico. Sea  $x_i$  = número de vehículos/h que circulan por la calle  $i$ . Suponiendo que el tráfico que entra a una intersección también sale, establezca un sistema de ecuaciones que describa el diagrama del flujo de tráfico. Por ejemplo, en la intersección  $[1]$   $x_1+x_5+100 =$  tráfico que entra = tráfico que sale =  $x_3+300$ , lo que da  $x_1-x_3+x_5=200$ .



- a) Resolver el sistema. Habrá un número infinito de soluciones. Escriba las soluciones respecto a las variables que son las naturales para elegirse de manera arbitraria.

- b) Suponer que la calle de  $[1]$  a  $[3]$  necesita cerrarse; es decir,  $x_3=0$ . ¿Puede cerrarse también la calle de  $[1]$  a  $[4]$  ( $x_5=0$ ) sin cambiar los sentidos del tránsito? Si no se puede cerrar, ¿cuál es la cantidad más pequeña de vehículos que puede admitir esta calle (de  $[1]$  a  $[4]$ )?

#### 4.- Circuitos eléctricos

La intensidad de las corrientes y las caídas de voltaje en un circuito eléctrico se rigen por las Leyes de Kirchhoff.

**LEY DE KIRCHHOFF DE LA CORRIENTE:** La suma algebraica de todas las corrientes en cualquier nodo es cero.

**LEY DE KIRCHHOFF DEL VOLTAJE:** La suma algebraica de todos los cambios de potencial en cualquier bucle es cero.



Una aplicación frecuente de estas leyes es cuando se conoce el voltaje de la fuerza electromotriz  $E$  (que por lo general es una batería o generador) y los ohmios  $R_j$  de las resistencias, y se pide calcular la intensidad  $i_j$  de las corrientes, que circulan por cada segmento del circuito.

Obsérvese que para cada elemento en el circuito hay que elegir una dirección positiva para medir la corriente que pasará a través de dicho elemento. Las elecciones se indican con flechas. Para la fuente de voltaje  $E$  se toma como positivo el sentido del polo negativo al positivo. Dicha elección condicionará también el signo de los cambios de potencial en las resistencias. El cambio de potencial a través de las resistencias será negativo cuando dicho cambio se mida en el mismo sentido que la corriente, y positivo en el caso contrario.

Ejemplo:

Ejemplo:

En los nodos A y B tenemos:

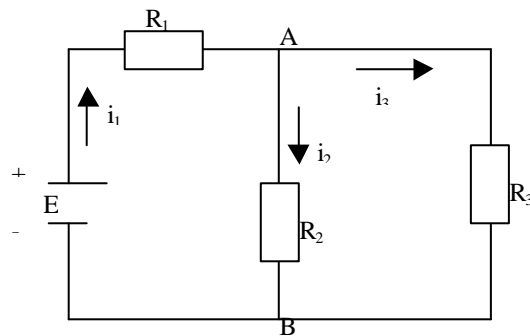
$$i_1 - i_2 - i_3 = 0$$

En el bucle  $L_1$  tenemos:

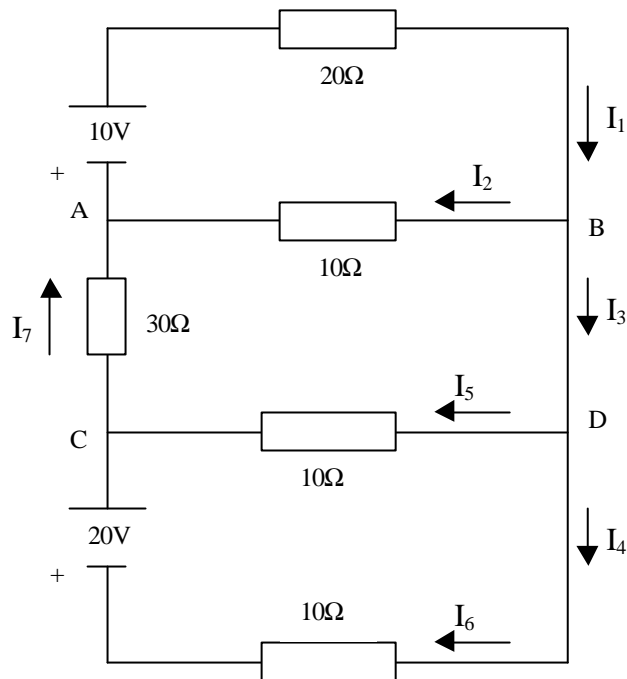
$$E - R_1 i_1 - R_2 i_2 = 0$$

En el bucle  $L_2$ :

$$R_2 i_2 - R_3 i_3 = 0$$



**Problema-** Calcular las corrientes  $i_1$ , a  $i_7$  en el circuito eléctrico de la figura de abajo.



Solución: