**Ejercicio 1** *El arte de lo posible*

Consideremos el siguiente problema:

¿Qué condiciones debe verificar un triángulo para que dos bisectrices de sus ángulos interiores sean perpendiculares? Justificar.

Y responder a las cuestiones que siguen.

**1. Método experimental.**

**a)** Trazar con GeoGebra un triángulo *ABC* y construir las bisectrices *f* y *g* de los ángulos en los vértices *B* y *C* respectivamente. Desplazar el vértice *A* intentando que *f* sea perpendicular a *g*. ¿Qué posición de *A* parece que satisface la condición de perpendicularidad?

**b)** Etiquetar con *O* el punto de intersección de las bisectrices y sea $α$ el ángulo *BOC*. Activar la cuadrícula y asegurarse de que la captura de punto está activada. Situar los vértices del triángulo en los puntos: *A*(0, 3), *B*(-1, -1) y *C*(1, -1). Cambiando la escala de la cuadrícula en cada caso, mover el punto *A* y anotar los valores correspondientes para $α$ en la siguiente tabla:

|  |  |
| --- | --- |
| ***A*(*xA; yA*)** | $$α$$ |
| (0, 3) |  |
| (0, 10) |  |
| (0, 100) |  |
| (0, 1 000) |  |

¿Qué tendencia se observa en los valores de $α$?

Ir a la ventana Vista algebraica y reemplazar *yA*primero por105  y luego por 106. ¿Qué sugiere el valor de $α$?

**c)** María enuncia la siguiente propiedad: «en un triángulo *ABC*, donde *A*(0, 105), *B*(-1, -1) y *C*(1, -1), las bisectrices de los ángulos interiores en *B* y en *C* son perpendiculares; en consecuencia, la mínima ordenada del punto A en que las bisectrices en *B* y en *C* son perpendiculares se encuentra entre 1.000 y 10.000». Comentar esta propiedad.

**d)** Completar la siguiente tabla para *A*(0, 1 000) :

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| ***B*(*xB, yB*)** | ***C*(*xC, yC*)** | $$α$$ |
| (-0,1, -0,1) | (-0,1, 0,1) |  |
| (-0,01, -0,1) | (-0,01, 0,1) |  |
| (-0,01, -0,01) | (-0,01, 0,01) |  |

¿Qué se observa con respecto a las bisectrices? ¿Habría que replantearse la propiedad enunciada por María? Justificar las respuestas.

**e)** Intentar demostrar que en un triángulo *ABC* isósceles en *A*, las bisectrices de los ángulos en B y C son perpendiculares. ¿Es posible?

**2. EL lugar de puntos.**

**a)** Volver a la ventana Vista gráfica de GeoGebra y situar los vértices del triángulo como sigue: *A*(0, 3), *B*(-1, -1) y *C*(1, -1). En la línea de comandos, escribir:

EcuaciónLugar(SonPerpendiculares(f, g), A)).

¿Qué significa la curva implícita d: y=-1? Justificar.

**b)** Aprovechando la captura de punto de la cuadrícula situar A sobre la recta d. ¿De qué tipo es el triángulo ABC resultante?

¿Cuánto mide el ángulo $α$?

¿Las rectas *f* y *g* son perpendiculares? Interpretar las respuestas teniendo en cuanta el problema inicial.

**c)** En la ventana Vista algebraica de GeoGebra redefinir los puntos *A*(0, $\infty $), *B*(-1, -1) y *C*(1, -1). Completar la siguiente tabla distinguiendo las respuestas de GeoGebra de las respuestas matemáticas:

| Pregunta | Respuesta de GeoGebra | Respuesta matemática |
| --- | --- | --- |
| ¿El triángulo *ABC* es isósceles en *A*? |  |  |
| ¿Cuánto vale $α $? |  |  |
| ¿Existen las rectas *f* y *g*? |  |  |
| ¿Son *f* y *g* perpendiculares? |  |  |
| ¿Dónde se sitúa el punto O? |  |  |

**d)** Suzanne Delorme, en un artículo de 1957, escribió[[1]](#footnote-2) :

*“… hagamos aquí alusión a la teoría de conjuntos y al artículo de G. Cantor (1887) donde demuestra que el infinito matemático existe: se puede alcanzar un infinito actual, como sostenía Fontenelle (hacia 1727), pero con la condición de no buscarlo, «como tuvo él la mal fortuna de hacer, en el interior de la serie; es después del final, y no hacia el final, de la serie que se alcanza el infinito actual.”*

Inspirándose en la cita anterior, ¿podemos suponer que en un triángulo *ABC* muy, muy grande, enorme que sea isósceles en A, las bisectrices de los ángulos en los vértices de la base son perpendiculares? ¿Por qué?

**e)** ¿Qué opinas sobre la siguiente propiedad: «en un triángulo *ABC*, si el vértice *A* pertenece a una de las bisectrices en los vértices *B* o *C*, entonces dichas bisectrices son perpendiculares»? Justificar si esta propiedad es válida *visualmente* (por ejemplo situando *A* en la recta por *BC* o en el segmento *BC* y comparando después lo que se ve), *instrumentalmente* (invocando, si es posible, un comando como Relación, Lugar, EcuaciónLugar, Envolvente, Demuestra o DemuestraDetalles) y finalmente *matemáticamente*.

**Ejercicio 2** *Decidido a usarlo deliberadamente*

Responder de dos formas diferentes a cada una de las siguientes cuestiones dependiendo del medio utilizado para razonar (visual, matemático, numérico, instrumental, etc.).

En cada caso explicar cuál es el nivel de precisión alcanzado en la solución obtenida (valor epistemológico, débil, medio o elevado).

**2.1.** Recordemos la propiedad que dice que en un triángulo *ABC* rectángulo en *A*, si *H* es el pie en *BC* de la altura desde *A*, entonces el cuadrado de la altura es igual al producto de la longitud de los dos segmentos en que altura divide *BC*. Normalmente a esta relación se le denomina media proporcional porque en un triángulo rectángulo, el cuadrado de la longitud de un cateto es igual al producto de la longitud de la hipotenusa por la longitud de la proyección de dicho cateto sobre la hipotenusa; es decir, es como si el cateto fuese la **media proporcional** entre la hipotenusa y su proyección (ortogonal) sobre ésta.

Reformulemos la pregunta: ¿es posible que en un triángulo cualquiera la altura desde un vértice sea media proporcional entre los segmentos en que divide el lado opuesto? Encontrar las condiciones que permiten responder afirmativamente a esta pregunta.

**2.2.** Si *Ω* es el centro de la circunferencia circunscrita a un triángulo (circuncentro), *O* es el centro de la circunferencia inscrita en él (incentro), *H* es el ortocentro y *G* el baricentro, ¿en qué casos los puntos *Ω,* *O, G* y *H* están alineados?

**2.3.** En el triángulo *ABC*, se consideran los puntos *H, I* y *J* pies de las alturas, y se considera el triángulo *HIJ* conocido como triángulo órtico de *ABC*. ¿En qué caso es equilátero el triángulo órtico?

**2.4.** Construir dos circunferencias tangentes y una recta tangente a ambas en los puntos *A* y *B* respectivamente. ¿Existe una relación numérica entre los radios de dichas circunferencias y la distancia entre *A* y *B*? Demostrarlo.

**2.5.** ¿Qué rectángulos verifican que su área es igual a su perímetro (sin tener en cuenta las unidades)?

**Ejercicio 3**

Proponer a vuestros alumnos una actividad de descubrimiento y otra de demostración que se resuelvan usando el interfaz de GeoGebra. En cada caso, es importante explicar bien el contexto del problema, las instrucciones particulares o pautas para la resolución, el medio didáctico (software, tabla, cuestionario) específico con que con el que tendría que interactuar el estudiante para dar las respuesta. También podemos proporcionar una etiqueta o título para cada actividad.

1. Delorme, S. (1957). La Géométrie de l’infini et ses commentateurs de Jean Bernoulli à M. de Cury. *Revue d’histoire des sciences et de leurs applications, 10*(4), 339–359. [↑](#footnote-ref-2)