

Vers un travail géométrique conforme et correct en contexte d’usages d’outils géométriques classiques et numériques

*Alain Kuzniak*¹, *Assia Nechache*² [alain.kuzniak@univ-paris-diderot.fr]

¹ Département de Mathématiques, Université de Paris, Paris, France

² Espé Cergy, Université de Cergy, Cergy, France

1 Objectifs de l’étude

Nos études antérieures [1] sur la résolution de problèmes géométriques par des futurs professeurs de l’enseignement primaire, en France, nous ont permis de dégager une forme de travail géométrique erronée mais très fréquente. Elle se caractérise par le fait qu’elle semble respecter toutes les formes extérieures du processus d’élaboration du travail géométrique mais que le résultat produit n’est pas correct. Le travail géométrique apparaît ainsi à la fois conforme et non correct. Pour paraphraser une publicité ancienne sur une boisson canadienne, le travail géométrique développé présente toute les apparences d’un travail géométrique authentique mais il n’en est pas un. Dans cette communication, nous expliciterons ce point en nous appuyant sur la théorie des Espaces de Travail Mathématique (ETM) qui permet d’évaluer les processus et résultats du travail géométrique réellement produit. Puis, nous explorerons un mode d’entrée dans le travail géométrique basé sur l’usage des outils géométriques et algébriques classiques et digitaux dont nous pensons qu’il est susceptible d’étayer les étudiants en moyens de contrôle sur leurs propres productions. Cette contribution participe du débat sur le rôle et l’utilisation de ces outils dans l’enseignement des mathématiques, et en particulier, sur leur influence potentielle relativement à la preuve et à la démonstration.

2 Un état des lieux: Alphonse ou un travail géométrique hors de contrôle

Dans le cadre du master de formation des maîtres du premier degré en France, nous avons proposé à des étudiants de première année de master une tâche géométrique sur l’estimation de l’aire d’un terrain, “le terrain d’Alphonse”.

2.1 La situation d'Alphonse

Dans un premier temps, l'énoncé de la tâche a été distribué sans l'information complémentaire concernant la longueur de l'une des diagonales du terrain et les étudiants ont pu chercher une solution pendant dix minutes. Il est attendu ici qu'ils constatent le manque de certaines données pour pouvoir fixer le quadrilatère et résoudre complètement la tâche.

“Alphonse vient juste de revenir d'un voyage dans le Périgord où il a vu un terrain en forme de quadrilatère qui a intéressé sa famille. Il aimerait estimer son aire. Pour cela, durant son voyage, il a mesuré, successivement, les quatre côtés du champ et il a trouvé, approximativement, 300 m, 900 m, 610 m, 440 m. Il a beaucoup de mal à trouver l'aire. Pouvez-vous l'aider en lui indiquant la méthode à suivre ? ”

Pour réaliser cette tâche, les étudiants doivent mobiliser des connaissances portant sur les quadrilatères, la notion d'échelle et l'aire d'un quadrilatère. De manière originale, la réalisation de cette tâche suppose une première modélisation liée à la forme et la représentation du terrain. Cette situation d'enseignement vise à aider les étudiants à identifier les paradigmes géométriques en jeu dans la résolution d'une tâche géométrique de façon à éviter certains blocages et malentendus sur le travail mathématique attendu.

2.2 Quelques conclusions

Contrairement aux attentes initiales, cette phase a suivi un déroulement inattendu du fait que la quasi-totalité des étudiants n'a pas relevé la nécessité d'obtenir des conditions supplémentaires pour fixer la forme du quadrilatère. En effet, les étudiants se sont engagés dans la recherche de l'aire du terrain en ajoutant spontanément certaines conditions supplémentaires (le quadrilatère est nécessairement particulier ou tous les quadrilatères ont la même aire puisqu'ils avaient le même périmètre).

De ce premier constat nous avons pu tirer des conclusions alarmantes sur l'absence de contrôle des étudiants sur leur travail. Ceci étant en grande partie dû au fait que les étudiants ont développé un *référentiel cognitif* en contradiction avec le référentiel théorique standard. Ce *référentiel* s'appuie sur un ensemble de connaissances et d'assertions fausses ou pour le moins discutables:

- Des théorèmes en actes faux (Aire Périmètre):
- L'usage systématique de formules même imaginaires;
- Les figures impliquées dans un problème sont nécessairement des figures particulières.

Ce *référentiel cognitif* provient de la pratique antérieure de la géométrie par les étudiants qui leur permet, dans le meilleur des cas de produire un travail géométrique dont les processus et méthodes paraissent riches et conformes au paradigme dominant mais dont les résultats sont érronés faute d'un contrôle basé sur un référentiel théorique correct.

3 Développer les outils de contrôle dans le cadre d'une géométrie I assumée

3.1 Le travail de Francis comme archetypé possible du travail attendu

A partir des résultats de cette première recherche, nous avons décidé de développer le travail géométrique des étudiants sur celui produit par un des leurs, Francis. Ce dernier a effectué une construction de la figure à l'échelle en utilisant une règle et un compas. Par ajustement, il a obtenu un trapèze guidé par l'idée que la figure devait être particulière. En utilisant diverses propriétés géométriques et des constructions imprécises obtenues par ajustement, il a justifié que sa figure était bien un trapèze. Ensuite, il a obtenu l'aire de cette figure en combinant formule et mesure sur le dessin. Il explique qu'il a le droit de faire cela car il a utilisé une échelle pour faire la figure. Son travail semble remplir les attentes de la Géométrie I du point de vue des processus mais les résultats ne sont pas corrects faute de contrôles suffisants. Nous dirons ici que ce travail géométrique est conforme mais non correct. En ce sens, ce travail est plus riche que le celui qui domine chez les étudiants qui était à la fois non conforme au niveau des processus et non correct au niveau des résultats.

3.2 La place spécifique des outils numériques

En nous appuyant sur le travail géométrique produit par Francis, notre objectif est d'amener les étudiants à développer un travail conforme aux règles de la Géométrie I mais aussi correct car contrôlé théoriquement et instrumentalement. Le travail géométrique attendu repose sur la construction des figures avec des outils, une approximation maîtrisée de la mesure, un ensemble de procédures de contrôle (triangulation, travail sur les formules). De cette façon, nous pensons destabiliser le référentiel cognitif des étudiants de façon à l'ajuster au référentiel épistémologique attendu à ce niveau.

Pour remettre en question le travail effectué précédemment, nous avons choisi de faire explorer les diverses configurations et formules d'aires possibles en utilisant une version de GeoGebra sur tablette. Pour analyser ce travail, nous utiliserons les différents types de preuves possibles associés aux différents plans verticaux de l'ETM [2]. Il s'agira d'évaluer si cette entrée informatique relativement modeste permet de rendre le travail géométrique des étudiants à la fois complet et conforme lorsqu'ils se retrouvent à nouveau dans un environnement classique du fait de la remise en cause de leur référentiel cognitif.

Keywords

Didactique, géométrie, travail mathématique

References

- [1] A. KUZNIAK; A. NECHACHE, Le terrain d'Alphonse ou les incertitudes de la mesure In *Actes du colloque Copirelem*, Blois, 2018.
- [2] P.R. RICHARD; F. VENANT; M. GAGNON, Issues and challenges about instrumental proof. In *Proof Technology in Mathematics Research and Teaching*, Hanna, G., Reid, D., de Villiers. M. (eds). Springer, New-York, 2019.

