



ESPACIOS Y SUBESPACIOS VECTORIALES

1.- Estúdiese si los siguientes subconjuntos constituyen un subespacio vectorial con las operaciones inducidas.

- a) $A = \{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 / x - y = 0 \}$
- b) $A = \{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 / x - y = 1 \}$
- c) $A = \{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 / y = x^2 \}$
- d) $A = \{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 / xy = 0 \}$
- e) $A = \{ (x, y, 0) \in \mathbf{R}^3 / x, y \in \mathbf{R} \}$
- f) $A = \{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 / x + y + z = 0 \}$
- g) $A = \{ (x, y, -y, x) \in \mathbf{R}^4 / x, y \in \mathbf{R} \}$
- h) $A = \{ M \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbf{R}) : \text{tr}(M) = 0 \}$, donde $\text{tr}(M)$ indica la suma de los elementos de la diagonal principal de M .

2.- En el espacio vectorial $\mathbf{R}^4$ se considera el subconjunto $M = \{ (x_1, x_2, x_3, x_4) / x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \}$

- a) Demostrar que M es un subespacio vectorial de $\mathbf{R}^4$.
- b) Encontrar en M , 3 vectores u, v, w que sean linealmente independientes, y demostrar que todo vector de M se puede poner como combinación lineal de u, v, w .

3.- Dados los vectores $u = (1, -3, 2)$ y $v = (2, -1, 1)$ en $\mathbf{R}^3$, escribir los vectores $(1, 7, -4)$ y $(2, 6, -4)$ como combinación lineal de u y v . ¿Para qué valores de k el vector $(1, k, 5)$ es combinación lineal de u y v ?

4.- Probar que si u, v, w son independientes, también lo son $u+v, v+w$ y $u+w$.

5.- Determinar a y b para que el vector $(1, 0, a, b)$ pertenezca al subespacio engendrado por $(1, 4, -5, 2)$ y $(1, 2, 3, -1)$.

6.- Dado el subconjunto $M = \{ (x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 : 2x + y - z = 0, t + x = 0 \}$ de $\mathbf{R}^4$ se pide:

- a) Probar que M es subespacio vectorial de $\mathbf{R}^4$.
- b) Demostrar que los vectores $\bar{u} = (1, -2, 0, -1)$, $\bar{v} = (1, -1, 1, -1)$ de M son linealmente independientes y escribir el vector $(1, 2, 4, -1)$ como combinación lineal de u, v .
- c) Calcular la dimensión de M y dar una base suya.
- d) Ampliar la base obtenida en c) a una base de $\mathbf{R}^4$.

7.- En el espacio vectorial $\mathbf{R}^3$, se considera el subconjunto: $S = \{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 / x + 2y + 3z = 0 \}$

- a) Demostrar que S es un subespacio de $\mathbf{R}^3$.
- b) Determinar una base de dicho subespacio.
- c) Expresar, si es posible, el vector $a = (-21, 3, 5)$ en dicha base.

8.- Demuéstrese que para cualquier valor de p , los vectores $(1, 0, 0)$, $(1, 0, 1)$ y $(1, 1, p)$ forman una base de $\mathbf{R}^3$. Calcúlese el valor de p para que las coordenadas del vector $(3, 1, 7)$ referidas a dicha base sean todas iguales a 1.

9.- Hallar unas ecuaciones paramétricas del subespacio de $\mathbf{R}^5$ formado por los vectores $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ que cumplen



$$\begin{cases} 3x_1 + x_3 + 2x_4 + 7x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_4 + 3x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 6x_5 = 0 \\ x_1 + x_3 + x_5 = 0 \end{cases}$$

10.- En el espacio vectorial $\mathbf{R}^4$ se tiene el sistema de vectores $S = \{(1,0,0,0), (1,1,0,0), (0,2,1,0)\}$ y el subespacio $W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{R}^4 / x_1 + x_2 = 0\}$

- Determinar una base del subespacio engendrado por S .
- Ecuaciones paramétricas de $L(S)$.
- Obtener una base de $\mathbf{R}^4$ completando la base hallada en el primer apartado.
- Determinar una base de W .
- Hallar una base del subespacio $W \cap L(S)$.

11.- En $\mathbf{R}^4$ se consideran los subespacios W_1 y W_2 engendrados, respectivamente, por los sistemas de vectores: $S_1 = \{(1,0,1,0), (0,1,0,1), (1,1,1,1)\}$

$$S_2 = \{(1,0,0,0), (2,1,0,1), (5,1,0,1)\}$$

Hallar: a) Bases y dimensión de W_1 y de W_2 .

- Ecuaciones y base de $W_1 + W_2$.
- Ecuaciones y base de $W_1 \cap W_2$.

12.- Dados los subespacios vectoriales de $\mathbf{R}^3$

$$W_1 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 / x + y = 0\}$$

$$W_2 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 / y - z = 0\}$$

- Calcular $W_1 \cap W_2$ y $W_1 + W_2$.
- Comprobar si se verifica $W_1 \oplus W_2 = \mathbf{R}^3$.

13.- Dados los subespacios vectoriales de $\mathbf{R}^4$

$$W_1 = \{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 / 2x = y; 2z = t\}$$

$$W_2 = \{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 / x + y + z + t = 0\}$$

$$W_3 = \{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 / x = y = z = t\}$$

- Calcular los subespacios vectoriales $W_1 + W_2$, $W_1 + W_3$, $W_2 + W_3$.
- Calcular los subespacios vectoriales $W_1 \cap W_2$, $W_1 \cap W_3$ y $W_2 \cap W_3$.
- ¿Son suplementarios los subespacios W_1 y W_2 ? ¿Y los subespacios W_2 y W_3 ?

14.- Dado el subespacio vectorial de $\mathbf{R}^3$, $W = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 / x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0\}$ y los vectores $u = (-3, 0, 1)$, $v = (0, 3, 2)$ y $w = (2, 1, 0)$, se pide:

- Comprobar que $S = \{u, v, w\}$ genera W .
- Estudiar si u , v y w son linealmente independientes.
- Encontrar un subconjunto de S que sea linealmente independiente y que además genere el subespacio W .

15.- Dados los subespacios vectoriales de $\mathbf{R}^3$

$$W_1 = L\{(1, 0, 1), (2, 1, 0)\}$$

$$W_2 = \{(a, a+b, -a) \in \mathbf{R}^3 / a, b \in \mathbf{R}\}$$

$$W_3 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 / x = z; y = 0\}$$

- Estudiar si el vector $v = (3, 0, 3)$ pertenece a algunos de estos subespacios.
- Dar una base de cada uno de ellos.
- Determinar las coordenadas de v respecto de las bases de los subespacios definidos.



- 16.- Dado el subespacio vectorial $P_4(x)$, se pide:
- a) Demostrar que $B = \{1, x, 2x^2, x^2+x^3, x^4\}$ es base de $P_4(x)$.
 - b) Calcular las coordenadas de $q(x) = 2x + 3x^2 - 5x^3 + x^4$ respecto de la base B .
- 17.- a) Calcular la dimensión del subespacio vectorial de $\mathbf{R}^4$ que tiene por ecuaciones implícitas $x - y + t = 0, 2y + z + t = 0, x + z = 0$.
- b) Encontrar una base del subespacio vectorial de $\mathbf{R}^3$ generado por los vectores $(1, 1, 0), (1, -1, 2), (2, 0, 2)$.
 - c) Sea U y V dos subespacios vectoriales de $\mathbf{R}^n$. Sabemos que $\dim U = 4, \dim V = 2$ y que $\dim U \cap V = 1$. ¿Cuál es la dimensión del subespacio suma $U + V$?
 - d) Sean $V = L\{(1, -1, 0), (0, 2, -1), (1, 3, -2)\}$ y $W = L\{(1, 1, -1)\}$ dos subespacios vectoriales de $\mathbf{R}^3$. Calcular $\dim(V+W)$ y $\dim(V \cap W)$.