



HOJA 2: Derivadas Parciales. Derivadas Direccionales. Funciones Diferenciables.

1. Calcula la matriz Jacobiana de las siguientes funciones:

a) $f(x, y) = (x^y, \log(xy), 2x)$ b) $f(x) = (xe^x, \cos(\cos x))$

c) $f(x, y, z) = x^2 \log z + y\sqrt{x} - xyz$ d) $f(x, y, z) = (xyz, xy, x)$

2. Sea la función $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^4 + y^4} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

a) Prueba que existen $D_1 f(0, 0)$ y $D_2 f(0, 0)$

b) Prueba que f no es continua en $(0, 0)$

3. Estudia la diferenciabilidad de las siguientes funciones en $(0, 0)$:

a) $f(x, y) = \begin{cases} x \cos \frac{1}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

b) $f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

c) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

d) $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$

e) $f(x, y) = |xy|^a$ según los valores de $a \in \mathbb{R}$

4. Calcula la derivada direccional de:

a) $f(x, y, z) = x \cos(yz)$ en $(0, 0, 0)$ en la dirección $(2, 1, -2)$



- b) $f(x, y) = 2x^3y - 3y^2$ en $(2, 1)$ en la dirección $(a, \sqrt{1-a^2})$. Hallar a para que esta derivada sea máxima.
1. Sea $h(x, y) = 2e^{-x^2} + e^{-3y^2}$ la altura de una montaña en la posición $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. ¿En qué dirección desde $(1, 0)$ se debería comenzar a caminar para escalar lo más rápido posible?
6. a) Sea $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y, z) = (2x + 4y - z, 6x - 3y - 4z)$. Calcula la matriz jacobiana de T .
- b) Demuestra que toda aplicación lineal $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ es diferenciable en todo punto $a \in \mathbb{R}^n$ y que $DT(a)(h) = T(h) \quad \forall h \in \mathbb{R}^n$.
7. Calcula $D_1 f(0, 0)$ y $D_2 f(0, 0)$ siendo $f: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = x^{x+y}$.
8. Calcula el gradiente de la función $f(x, y, z) = \int_{xy}^{\sin(x \sin(y \sin z))} \Psi(t) dt$ en $(0, 0, 0)$.
9. a) Sean $f(x, y) = 2x + y$, $g(x, y) = 1 + |xy|^{1/2}$. Prueba que g no es diferenciable en el origen, pero que $h(x, y) = (f \cdot g)(x, y)$ sí lo es.
- b) Calcula la derivada direccional máxima de h en el origen. ¿En qué dirección es máxima?
10. Sean $f(x, y) = (y + \cos x, x + e^y)$, $g(u, v) = u + v$.
- a) Demostrar que f y g son diferenciables en $\mathbb{R}^2$.
- b) Calcular la matriz jacobiana de la función compuesta $F = g \circ f$ en $(0, 0)$.
11. Sea $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable en un punto $P \in \mathbb{R}^2$. Supongamos que
- $$D_v f(P) = 1, D_w f(P) = 2$$
- siendo $v = (2, 3)$, $w = (1, 1)$.



- a) Calcular $\nabla f(P)$
- b) Representar el conjunto de todos los vectores u para los que $D_u f(P) = 6$
- c) Calcular el máximo de la derivada direccional de f en P .