

1.9 GENERACIÓN EFECTIVA DE LOS FLANCOS DE LOS DIENTES

Los dientes de los engranajes se mecanizan por fresado, cepillado, o formado con sinfín, y pueden ser acabados por cepillado, bruñido, esmerilado o pulido con rueda.

1.9.1 FRESADO

En este procedimiento la herramienta (fresa) tiene la forma del espacio entre dientes. Una vez que se ha cortado un espacio, se gira la rueda para situarla en la posición correspondiente al siguiente espacio.

Inconvenientes: la herramienta sólo puede emplearse para mecanizar ruedas dentadas con un diámetro principal y número de dientes determinados, por lo que este método se emplea en contadas ocasiones.

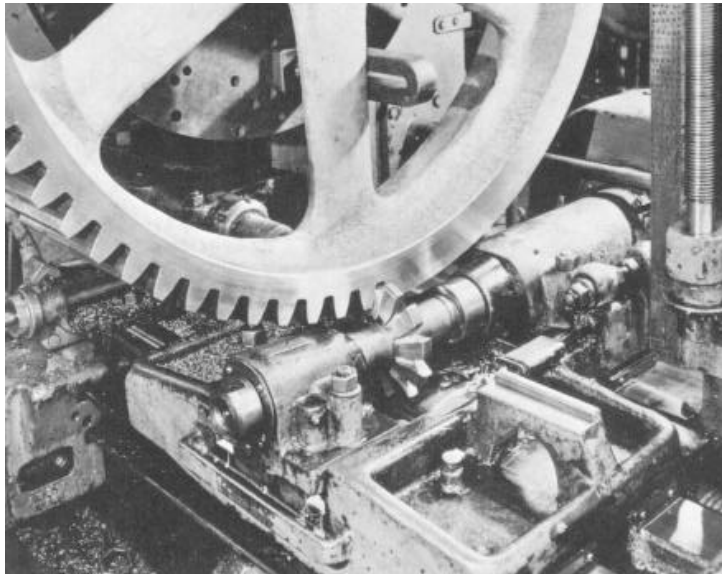


Figura 1.9.1. Fresado

1.9.2 CEPILLADO

En este procedimiento los dientes se forman mediante un cortador en forma de piñón o de cremallera.

1.9.3 GENERACIÓN DEL DIENTE CON UN CORTADOR EN FORMA DE CREMALLERA

En este método se emplea un cortador en forma de cremallera, de módulo igual al de la rueda a tallar. En todo momento el corte se produce debido a un movimiento de vaivén de la herramienta en la dirección del eje de la rueda.

Para la fabricación, se parte de un disco de radio igual al de cabeza del engranaje, se enfrenta este al cortador, y se hace avanzar la herramienta de modo que penetre en el cuerpo de la rueda hasta que su línea media sea tangente a la circunferencia primitiva de referencia de esta última. Luego, después de cada golpe de corte, se hace girar el cuerpo de la rueda ligeramente, al mismo tiempo que se desplaza longitudinalmente la cremallera, tal como lo haría una cremallera real al engranar con la rueda ya acabada. Este movimiento se repite hasta llegar a completar una distancia igual al paso circular. En ese momento, se habrá completado el tallado de un diente, y se reposiciona la cremallera para proceder al mecanizado del siguiente.



Figura 1.9.2 Cortador en forma de cremallera.

De este modo, los flancos de los dientes resultan como envolventes del flanco recto de la herramienta en su movimiento de rodadura sobre la circunferencia primitiva de referencia.

Este método se emplea con mucha frecuencia, debido a la sencillez del útil de mecanizado, si bien da lugar a una ligera imprecisión en el tallado, debido al movimiento de reposicionamiento de la herramienta.

1.9.4 GENERACIÓN DEL DIENTE CON UN CORTADOR EN FORMA DE PIÑÓN (CONTRARRUEDA)

Este método es análogo al anterior, solo que en lugar de una cremallera se emplea una herramienta en forma de piñón del mismo módulo que el de la rueda a generar.



Figura 1.9.3. Cortador en forma de piñón.

Ventajas: Permite generar ruedas internas, y no da lugar a problemas de imprecisión por reposicionamiento de la herramienta.

Desventajas: Cualquier defecto de la herramienta se reproduce en la rueda.

1.9.5 FORMADO CON SINFIN

El cortador es una herramienta con forma semejante a la de un tornillo sinfín. Los dientes son de lados rectos, como los de una cremallera, pero el eje del cortador tiene que girar una magnitud igual al ángulo de avance para cortar dientes rectos (no helicoidales).

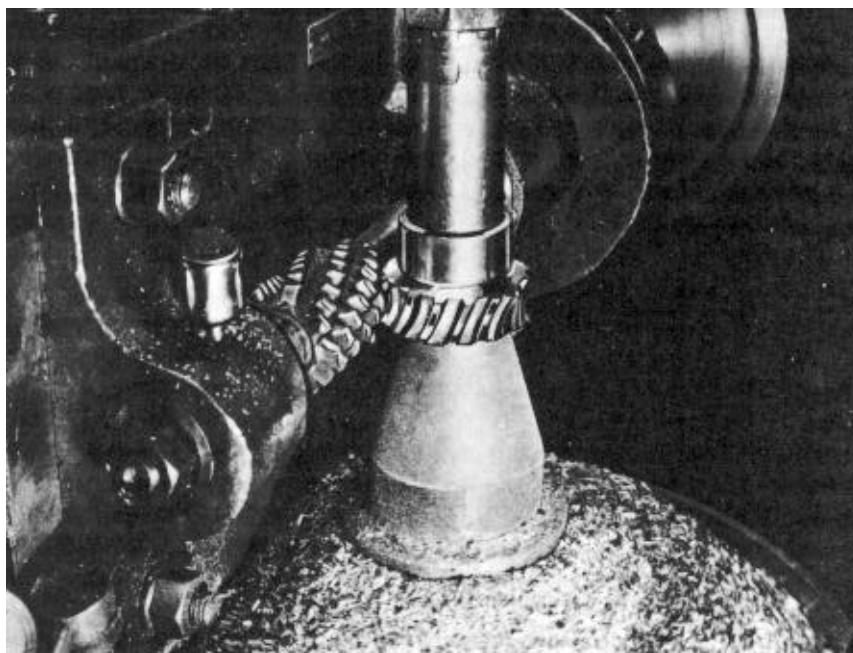


Figura 1.9.4. Máquina de formado con sinfín.

Ventajas: no hay que reposicionar la herramienta, lo que conduce a resultados de mayor precisión.

Este es posiblemente el método más empleado.

Aparte de los ya vistos, que son los más frecuentes, existen otros métodos de producción de ruedas dentadas, tales como fundición, extrusión, estampación, moldeo, sinterizado, etc.

Una vez mecanizados, los dientes pueden ser acabados por cepillado, bruñido, esmerilado o pulido con rueda.

1.10 PERFIL DE REFERENCIA

Para definir las dimensiones normalizadas del dentado de un sistema de engranajes de evolvente se emplea una cremallera ficticia, llamada CREMALLERA DE REFERENCIA, que sería el útil de corte empleado para generar esos dientes. La sección normal de dicha cremallera se conoce con el nombre de PERFIL DE REFERENCIA.

En el proceso de corte en la fabricación con cremallera de talla, el movimiento relativo entre la rueda y la herramienta es de rodadura de la línea media (de referencia) de la cremallera sobre la circunferencia primitiva de referencia de la rueda.

La normal trazada al flanco de la herramienta, H, desde el punto de rodadura, C, es normal también al perfil del diente en el punto de contacto entre ambos, por lo que puede ser considerada como el cordel cuyo extremo describía el perfil de evolvente.

Así pues, el círculo de radio r_b al que es tangente dicha recta será el círculo básico de la evolvente.

De la figura siguiente se deduce que:

$$r_b = r \cdot \cos \alpha_o$$

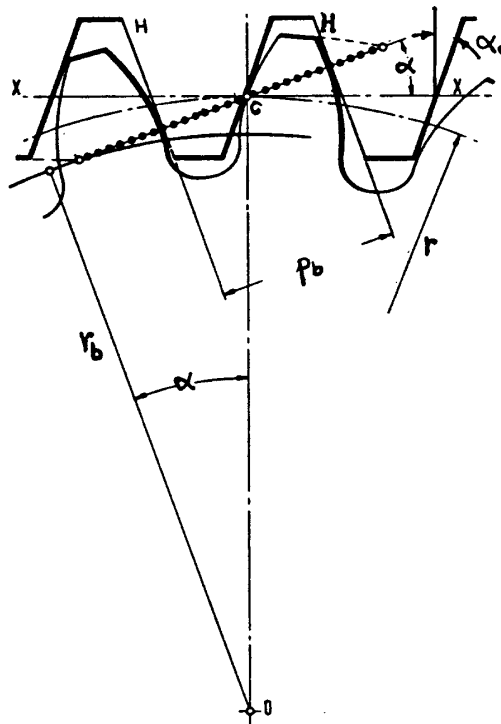


Figura 1.10.1

Por otra parte, ya se ha visto que

$$r_b = r \cdot \cos \alpha$$

E igualando ambas expresiones, resulta evidente que:

$$\alpha_0 = \alpha$$

Por tanto, el ángulo de los flancos del perfil de referencia ha de ser igual al ángulo de presión de referencia que, como ya se dijo, esta normalizado.

Para dentados sin desplazamiento (línea media de la cremallera tangente a la circunferencia primitiva de referencia), las dimensiones del perfil de referencia del dentado y de la herramienta asociada a él están normalizados (UNE 18-016-84), (ISO 53), y vienen dadas por las siguientes expresiones:

$$\alpha_0 = \alpha = 20^\circ$$

$$h_a = m$$

$$h_f = h_{a0} = 1.25m$$

$$h_w = 2m$$

$$c = 0.25m$$

$$h_t = 2.25m$$

$$e = m\pi/2$$

$$h = m\pi/2$$

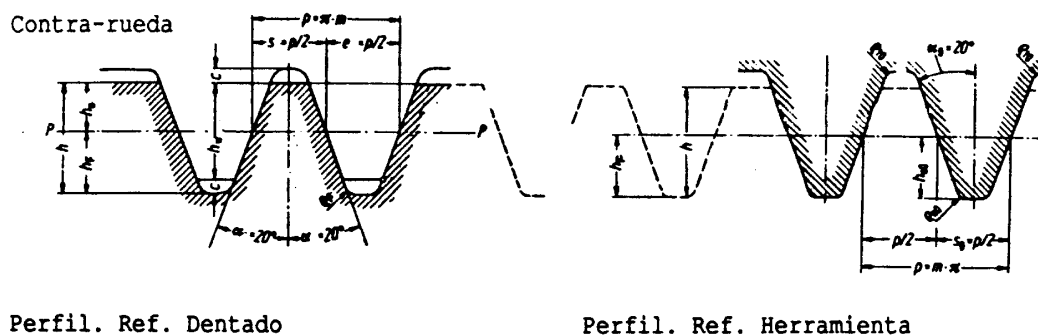


Figura 1.10.2
Los módulos más empleados son:

Bastos ($m > 1\text{mm}$)			Finos ($m < 1\text{mm}$)	
50	6	1	1	0.6
24	5	1.5	0.9	0.5
12	4	1.25	0.8	0.4
10	3		0.75	0.3
8	2.5		0.7	0.2

Podrían fabricarse ruedas con otros módulos no normalizados, pero el coste que supondría fabricar las herramientas especiales para ello hace que esto no resulte rentable.

1.10.1 PENETRACIÓN E INTERFERENCIA. NÚMERO LÍMITE DE DIENTES

Analizando la forma en que se genera la curva evolvente, resulta claro que esta no puede extenderse por debajo de su círculo de base. Sin embargo, como los sistemas de normalización, al determinar la profundidad y la altura de los dientes, no toman en cuenta dicha posibilidad, puede suceder que estos rebasen el círculo de base. Este fenómeno se conoce con el nombre de PENETRACIÓN, ya que se produce cuando la herramienta penetra en el interior del círculo básico.

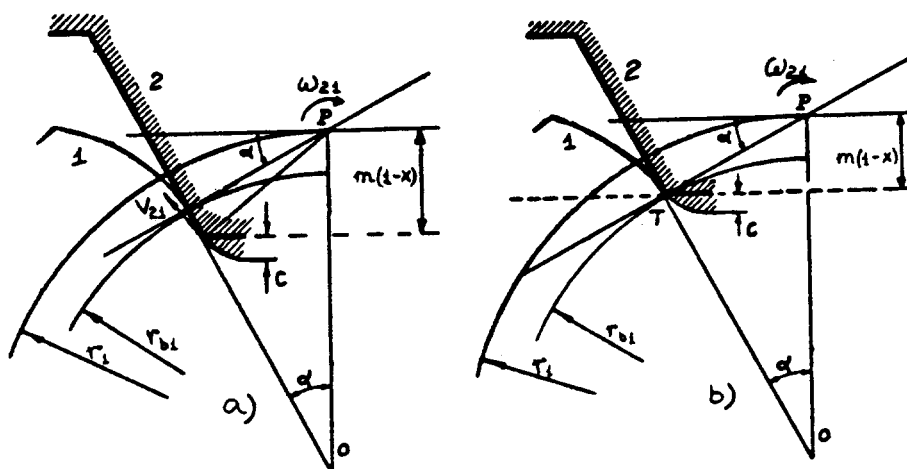


Figura 1.10.3

La parte del diente que queda por debajo del círculo de base no sigue el perfil de evolvente, por lo que resulta inútil, y tiende a interferir con la punta del diente con el que engrana, lo cual no es de extrañar, puesto que ya no son perfiles conjugados. Este otro fenómeno, íntimamente ligado al anterior, se conoce con el nombre de INTERFERENCIA, y es un efecto no deseable.

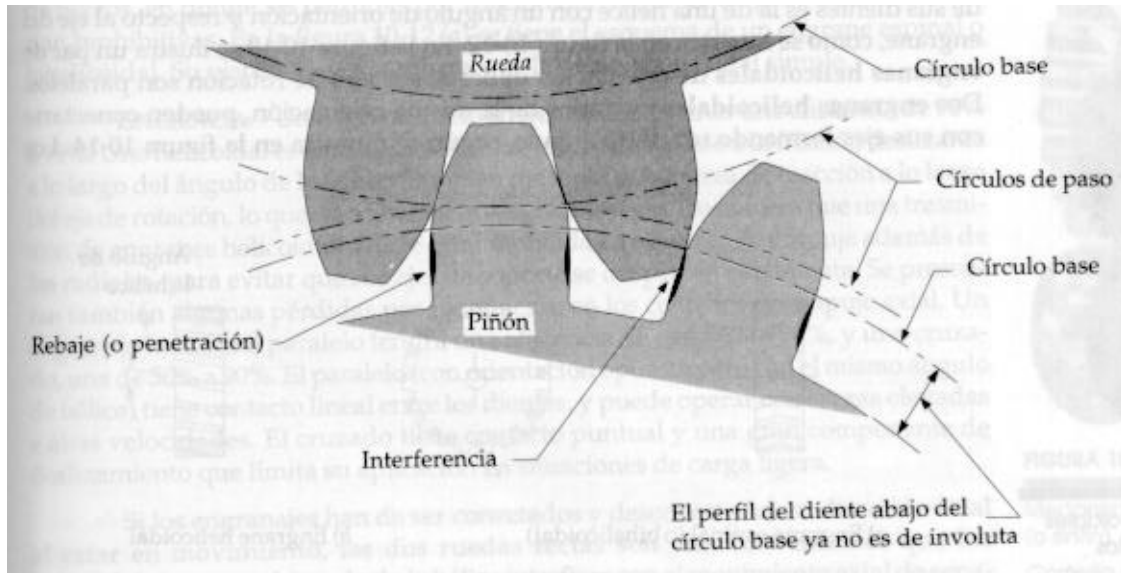


Figura 1.10.4

La situación límite de penetración es aquella en la que la cabeza de la herramienta (cremallera) sale tangencialmente al flanco que acaba de generar, y por tanto no lo daña.

La condición para que no exista penetración es que el extremo del flanco plano de la herramienta no sobrepase el punto de tangencia, T, de la línea de engrane con la circunferencia básica. Esto se debe a que en dicho punto la velocidad relativa de la cremallera respecto al flanco es tangente a ambos. En efecto, dado que el movimiento relativo de la cremallera respecto a la rueda es una rodadura respecto al punto primitivo, es claro que la velocidad relativa de cualquier punto del flanco de la cremallera respecto al perfil del diente es normal a la línea que une dicho punto con el punto primitivo. En la situación límite que se está estudiando, dicha normal coincide con la línea de engrane, que a su vez es normal al diente, por lo que la velocidad relativa será tangente a él.

Nótese que si el flanco de la herramienta se extendiera más allá del punto T, una vez generado el perfil hasta dicho punto la herramienta debería salir, pero en este caso la velocidad del extremo del flanco ya no sería tangente al diente, y se produciría PENETRACIÓN. Este fenómeno de penetración, aparte de la ya citada interferencia, ocasiona una reducción del espesor del diente en su base, haciéndolo menos resistente, por lo que es un fenómeno que debe tratar de evitarse.

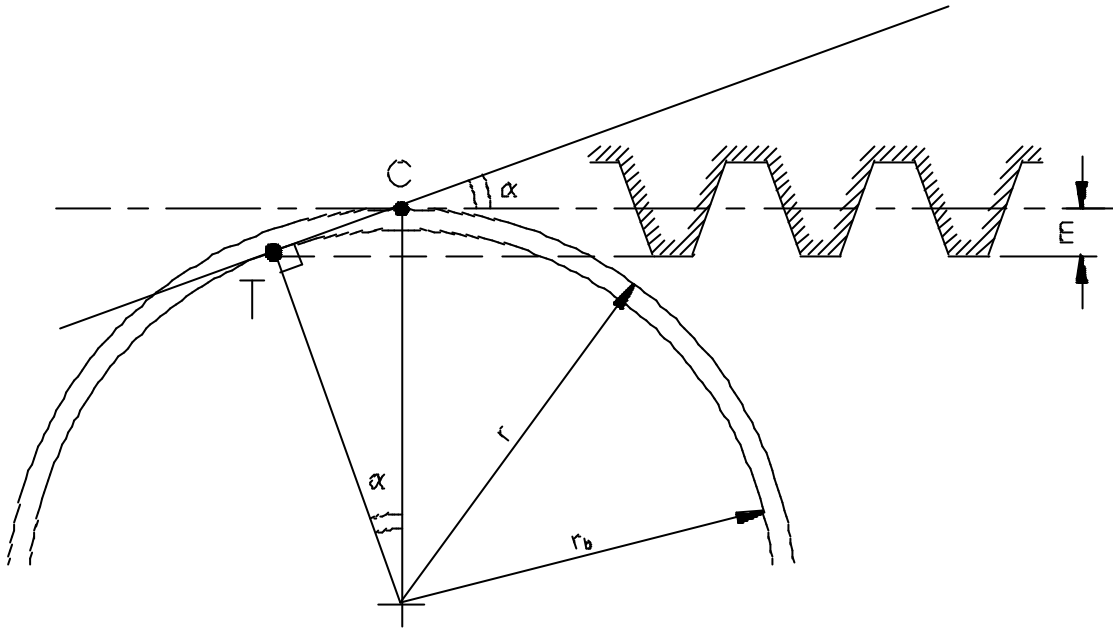


Figura 1.10.5

A la vista de la Figura 1.10.5, se deduce que la condición límite para que no se produzca penetración en la talle es que

$$r - m \geq r_b \cdot \cos \alpha$$

Como $m = 2r/z$ y como $r_b = r \cos \alpha$, se tiene que

$$r - \frac{2r}{z} \geq r \cdot \cos^2 \alpha \Rightarrow 1 - \frac{2}{z} \geq \cos^2 \alpha \Rightarrow \frac{2}{z} \leq 1 - \cos^2 \alpha \Rightarrow \frac{2}{z} \leq \sin^2 \alpha \Rightarrow$$

$$z \geq \frac{2}{\sin^2 \alpha}$$

Para un dentado con $\alpha = 20^\circ$, el número límite de dientes, z_l , para que no se produzca penetración es:

$$z \geq \frac{2}{\sin^2 20^\circ} \approx 17 \Rightarrow z_l = 17$$

No obstante, se admite que se construyan ruedas cilíndrico rectas con un número mínimo de dientes de $z_l = 14$ ya que, aunque se produce una pequeña penetración en la base del diente, esta no es importante. Además, debido al juego de cabeza, esa zona nunca llegará a ser de contacto.

En caso de que se necesite emplear una rueda con un número de dientes inferior a este, la penetración puede evitarse empleando procedimientos especiales de talla.

El análisis anterior garantiza el engrane correcto con ruedas cuya altura de cabeza es igual al módulo. La expresión anterior también se utiliza para evitar la penetración en la talle por generación con cremallera de adendo = $1,25 m$ ya que el redondeo del extremo del diente de la cremallera evita la penetración.

1.11 PROCEDIMIENTOS DE TALLA PARA EVITAR LA PENETRACIÓN

Existen tres métodos para evitar la penetración de los dientes, que se emplean, como ya hemos dicho, cuando se quieren construir ruedas con menos de 14 dientes, que era el número límite de dientes que se tiene en la práctica.

1.11.1 VARIACIÓN DEL ÁNGULO DE INCLINACIÓN DEL FLANCO DE LA CREMALLERA

En este procedimiento se emplea una cremallera con un ángulo, α_0 mayor que el de referencia.

$$\alpha_0 > \alpha = 20^\circ$$

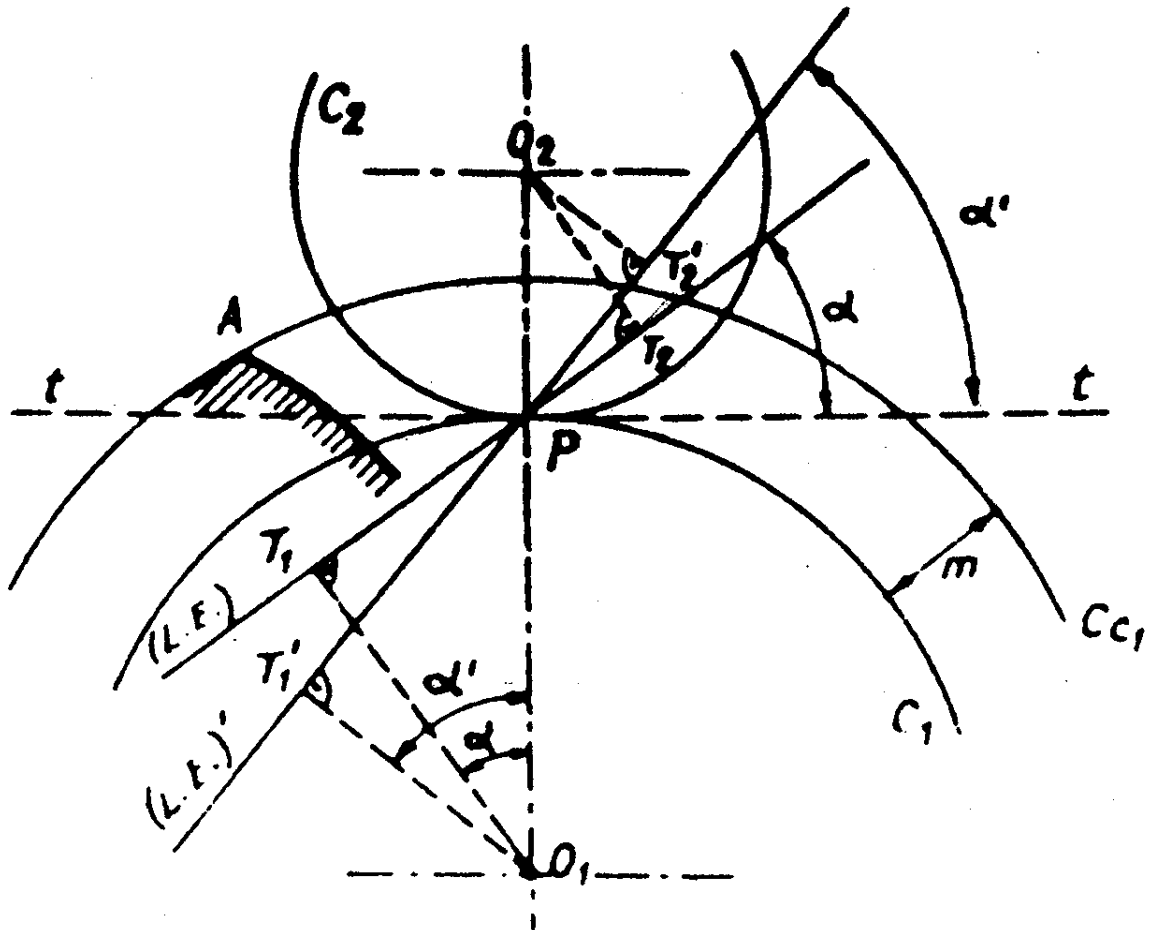


Figura 1.11.1

La expresión anteriormente calculada para el número mínimo de dientes seguirá siendo válida, por lo que:

$$z' \geq \frac{2}{\sin^2 \alpha_0}$$

Y como $\alpha_0 > \alpha$, se tiene que

$$z'_1 = \frac{2}{\sin^2 \alpha_0} < \frac{2}{\sin^2 \alpha} = z_1 \Rightarrow z'_1 < z_1$$

Se observa, pues, como un aumento del ángulo de la cremallera conduce a una disminución del número límite de dientes.

No obstante, este método presenta un inconveniente, y es que esta cremallera no está normalizada, por lo que habría que fabricarla especialmente, lo que haría aumentar los costes de producción. Por otro lado el aumento del ángulo de presión aumenta las cargas normales sobre árboles y ejes.

1.11.2 DENTADO REBAJADO

En este caso, se emplea una dentadura cuyas alturas de pie y de cabeza son menores que las normalizadas.

$$h_a = m \cdot y \quad \text{con } y < 1$$

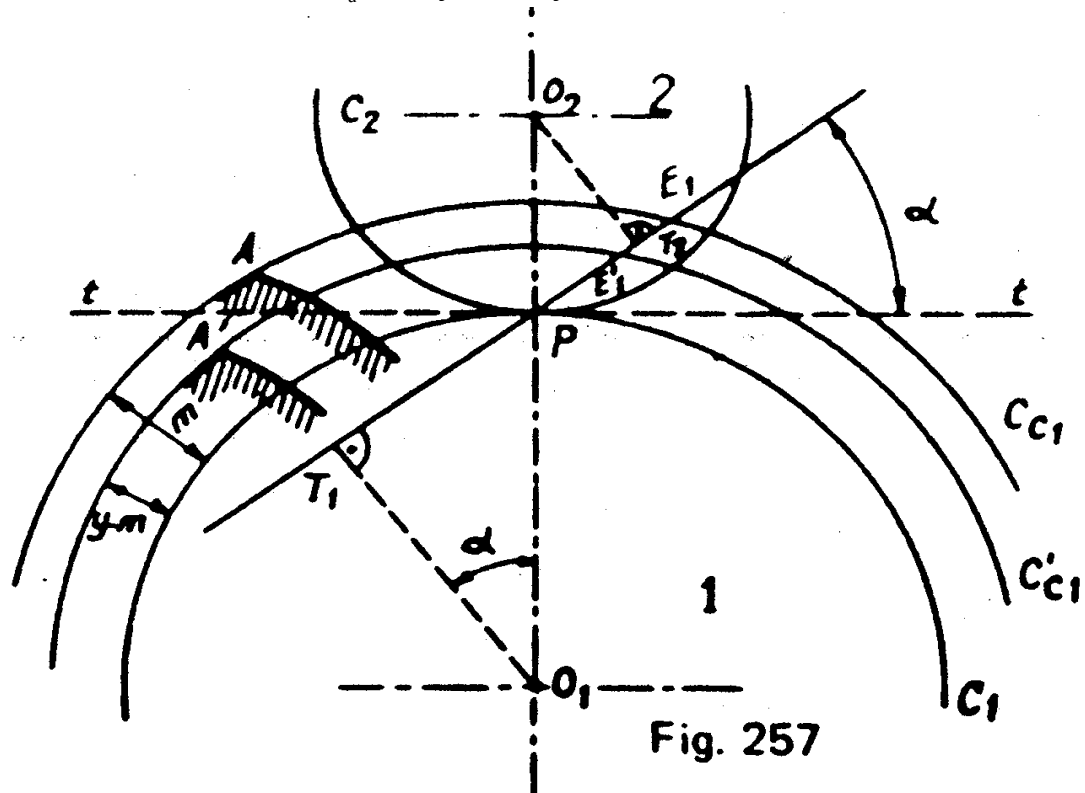


Figura 1.11.2

Siguiendo un razonamiento análogo al anterior, el número mínimo de dientes viene ahora dado por:

$$r - m \cdot y \geq r_b \cdot \cos \alpha$$

Como $m = 2 r / z$ y como $r_b = r \cos \alpha$, se tiene que

$$r - \frac{2r}{z'} y \geq r \cdot \cos^2 a \Rightarrow 1 - \frac{2y}{z'} \geq \cos^2 a \Rightarrow \frac{2y}{z'} \leq 1 - \cos^2 a \Rightarrow \frac{2y}{z'} \leq \sin^2 a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z' \geq \frac{2y}{\sin^2 a} \Rightarrow z'_l = \frac{2y}{\sin^2 a}$$

Y como $y < 1$

$$z'_l = \frac{2y}{\sin^2 a} < \frac{2}{\sin^2 a} = z_l \Rightarrow z'_l < z_l$$

En este caso la herramienta tampoco está normalizada.

1.11.3 DESPLAZAMIENTO EN LA TALLA. DENTADURAS DESPLAZADAS

En este procedimiento, la línea de referencia de la herramienta durante la talla está desplazada una longitud $+xm$ hacia el exterior de la circunferencia primitiva de referencia. El parámetro x recibe el nombre de **factor de desplazamiento** del dentado.

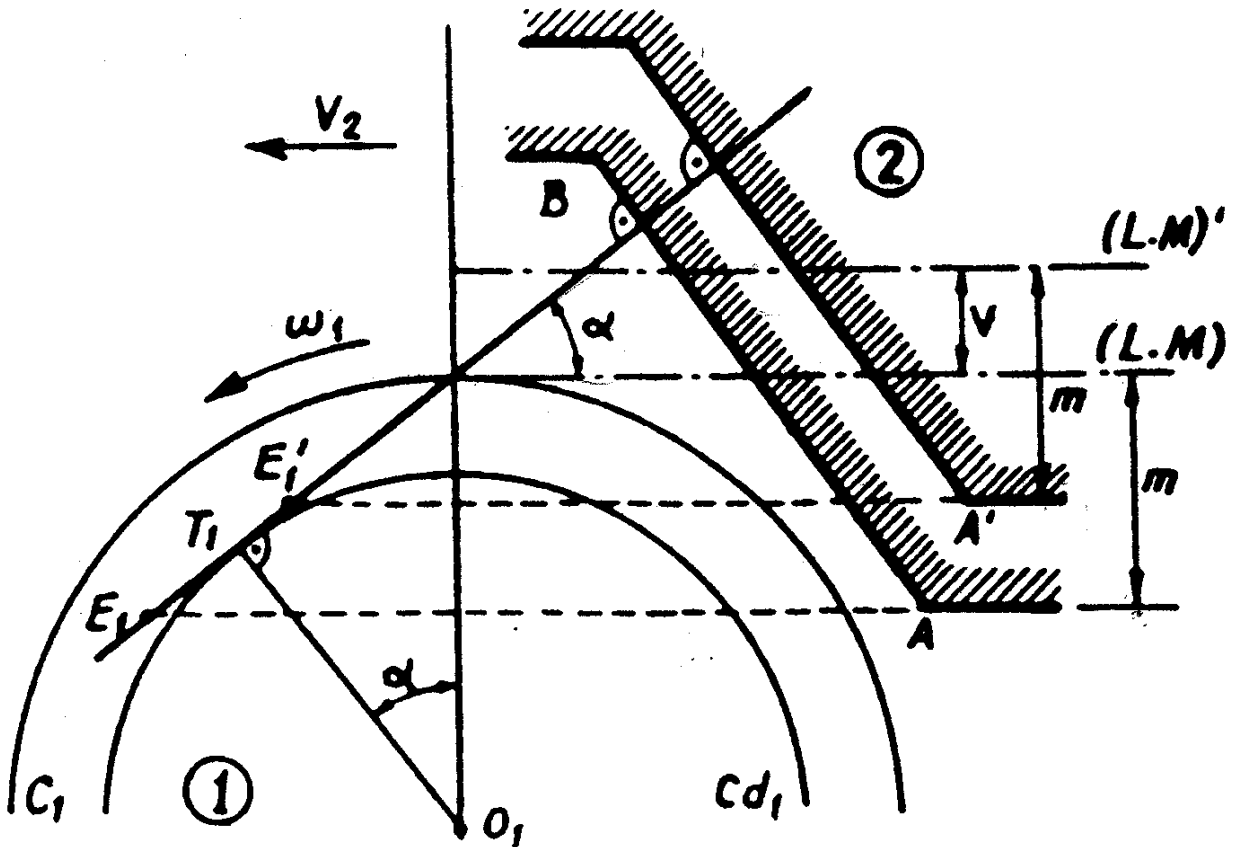


Figura 1.11.3

Operando de igual modo que en casos anteriores:

$$r + x.m - m \geq r_b \cos \alpha \Rightarrow r - (1-x) \cdot m \geq r_b \cos \alpha$$

Como $m = 2 r / z$ y como $r_b = r \cos \alpha$, se tiene que

$$r - \frac{2r}{z'} (1-x) \geq r \cdot \cos^2 a \Rightarrow 1 - (1-x) \frac{2}{z'} \geq \cos^2 a \Rightarrow$$

$$(1-x) \frac{2}{z'} \leq 1 - \cos^2 a \Rightarrow \frac{2(1-x)}{z'} \leq \sin^2 a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z' \geq \frac{2(1-x)}{\sin^2 a} \Rightarrow z'_l = \frac{2(1-x)}{\sin^2 a}$$

Y como x debe ser menor o igual que 1 para que la herramienta pueda cortar, es claro que

$$z'_l = \frac{2(1-x)}{\sin^2 a} < \frac{2}{\sin^2 a} = z_l \Rightarrow z'_l < z_l$$

En este caso la herramienta sí está normalizada, y este tipo de talla se llama **talla a +V**.

De la expresión anterior se deduce el valor del factor de desplazamiento.

$$z'_l = \frac{2(1-x)}{\sin^2 a} \Rightarrow (1-x) = z'_l \frac{\sin^2 a}{2} \Rightarrow x = 1 - \frac{z'_l}{\frac{2}{\sin^2 a}} = 1 - \frac{z'_l}{z_l} = \frac{z_l - z'_l}{z_l}$$

Sin embargo, por las mismas razones que anteriormente se expusieron, en la práctica se puede trabajar con un número de dientes inferior al calculado, luego

$$x = \frac{14 - z'}{17}$$

Las dimensiones del dentado que resultan al desplazar la herramienta son las siguientes:

<i>Altura de cabeza:</i>	$h_a = m(1+x)$
<i>Altura de pie:</i>	$h_f = m(1,25-x)$
<i>Espesor:</i>	$e = p.m/2 + 2 \times m \operatorname{tga}$
<i>Hueco:</i>	$h = p.m/2 - 2 \times m \operatorname{tga}$

Nota: el radio primitivo no cambia.

Atendiendo a la forma en que se realiza la talla, las ruedas se clasifican en:

- **Ruedas a cero** (rueda normal): si el círculo primitivo es tangente a la línea media del perfil de referencia de la talla y la rueda se llama a cero.
- **Ruedas a V** (con desplazamiento): la línea media del perfil de referencia se desplaza respecto a la circunferencia primitiva una cantidad $V = mx$, contada positivamente hacia el exterior (rueda V_+) y negativamente hacia el interior (Rueda V_-).

1.12 LA FUNCIÓN EVOLVENTE

Para el desarrollo de la función evolvente seguiremos los pasos que se describen a continuación.

- Elegimos un punto genérico, P, sobre la curva evolvente.
- Unimos P con el centro del círculo básico, O; al punto de corte lo llamamos E.
- Trazamos por P la tangente a la circunferencia básica; al punto de tangencia lo llamamos A.
- Llamamos B al punto de corte de la evolvente con la circunferencia básica.
- Llamamos α^* al ángulo BOE.

- Llamamos α al ángulo POA.

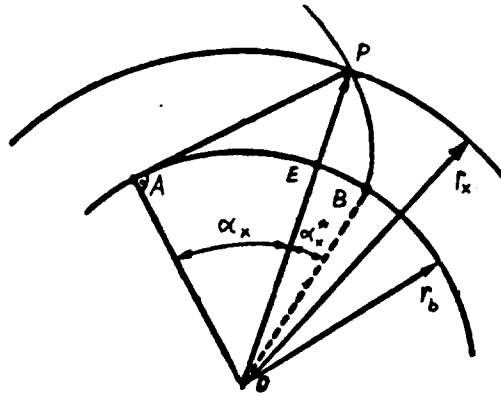


Figura 1.12.1

Por las ya conocidas propiedades de la evolvente de círculo, se obtienen las siguientes relaciones:

$$a^* = \frac{\widehat{EB}}{r_b} = \frac{\widehat{AB} - \widehat{AE}}{r_b} = \frac{\widehat{AP}}{r_b} - \frac{\widehat{AE}}{r_b} = \text{tg } a - a$$

La función $(\text{tg } \alpha_x - \alpha_x)$ recibe el nombre de **función evolvente**:

$$\text{Eva} = \text{tg } a - a \Rightarrow a^* = \text{Eva}$$

1.13 CÁLCULO DEL ESPESOR DEL DIENTE

Seguidamente se procederá al cálculo del espesor del diente en una circunferencia de radio genérico r_x .

Sean α_x y α_x^* los ángulos empleados para definir la función evolvente en el punto P de corte de la curva evolvente con la circunferencia de radio r_x . Y sean Υ y Υ^* los correspondientes al punto L en el que se cortarían los dos flancos del diente.

Llamaremos C al punto de corte de la circunferencia básica con la recta OL.

Por semejanza, se tiene que:

$$\frac{\frac{s_x}{2}}{r_x} = \frac{\widehat{EC}}{r_b} \Rightarrow s_x = 2 \cdot \widehat{EC} \cdot \frac{r_x}{r_b} = 2(\widehat{CB} - \widehat{EB}) \frac{r_x}{r_b}$$

Por otra parte, por las propiedades de la evolvente, se sabe que

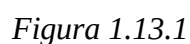
$$\left. \begin{array}{l} a_x^* = \text{Eva}_x \\ \text{Como } \widehat{EB} = r_b \cdot a_x^* \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{EB} = r_b \cdot \text{Eva}_x$$

Análogamente

$$\widehat{CB} = r_b \cdot \text{Evg}$$

Y sustituyendo se llega a:

$$s_x = 2 \cdot (r_b \cdot \text{Evg} - r_b \cdot \text{Eva}_x) \frac{r_x}{r_b} \Rightarrow s_x = 2 \cdot r_x \cdot (\text{Evg} - \text{Eva}_x)$$



Y, por otra parte,

$$\frac{\Delta s}{xm} = \operatorname{tg} a \Rightarrow \Delta s = x \cdot m \cdot \operatorname{tg} a$$

Por tanto:

$$s' = \frac{pm}{2} + 2 \cdot x \cdot m \cdot \operatorname{tg} a$$

Sustituyendo este valor, queda:

$$\left. \begin{aligned} \frac{pm}{2} + 2 \cdot x \cdot m \cdot \operatorname{tg} a &= 2 \cdot r \cdot (Evg - Eva) \\ \text{Como } m &= \frac{2r}{z} \Rightarrow r = \frac{mz}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\frac{pm}{2} + 2 \cdot x \cdot m \cdot \operatorname{tg} a = m \cdot z \cdot (Evg - Eva) \Rightarrow$$

$$Evg = \frac{p}{2z} + \frac{2x}{z} \operatorname{tg} a + Eva$$

Según esto, el espesor del diente para una circunferencia genérica de radio r_x vendrá dado por:

$$s_x = 2 \cdot r_x \cdot \left[\frac{p}{2z} + \frac{2x}{z} \operatorname{tg} a + Eva - Eva_x \right]$$

1.14 MONTAJE DE ENGRANAJES. ENGRANAJES A CERO. ENGRANAJES EN V.

Cuando en un engranaje las circunferencias primitivas de funcionamiento coinciden con las de referencia, se dice que las ruedas están montadas a cero. Por el contrario, si las circunferencias primitivas de referencia no son tangentes entre sí, no coincidirán con las de funcionamiento, y se dice que las ruedas están montadas en V.

Existen tres posibilidades distintas en cuanto al montaje y la talla de las ruedas de un engranaje:

1.14.1 ENGRANAJES MONTADOS A CERO CON RUEDAS TALLADAS A CERO

Se emplean cuando las dos ruedas tienen más de 14 dientes.

1.14.2 ENGRANAJES MONTADOS A CERO CON RUEDAS TALLADAS A V

Este método se emplea cuando una de las ruedas tiene menos de 14 dientes y la otra más, y la suma del número de dientes de ambas ruedas es mayor que 28.

Al tener una rueda con menos de 14 dientes, es preciso emplear un método especial de talla para que no se produzca el fenómeno de penetración anteriormente descrito.

En este caso, se tallan ambas ruedas a V; la que tiene menos de 14 dientes con desplazamiento positivo para evitar la penetración, y la otra con el mismo

desplazamiento, pero negativo, para conseguir que las circunferencias primitivas de funcionamiento coincidan con las de referencia. Es decir:

$$x_1 = -x_2$$

1.14.3 ENGRANAJES MONTADOS EN V CON RUEDAS TALLADAS A V

Se emplea este método cuando ambas ruedas tienen menos de 14 dientes o bien cuando, teniendo una rueda más de 14 dientes, la suma del número total de dientes del engranaje es menor que 28.

En este caso las dos ruedas se tallan a V, con desplazamientos diferentes, y se montan en V, de tal modo que no exista holgura circunferencial entre las ruedas, como se describirá a continuación.

1.15 DISTANCIA ENTRE EJES DE FUNCIONAMIENTO

La distancia entre ejes de funcionamiento, a' , es la suma de los radios primitivos de funcionamiento.

$$a' = r'_1 + r'_2$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Como: } r_b = r' \cdot \cos a' \\ \text{y: } r_b = r \cdot \cos a \end{array} \right\} \Rightarrow r' \cdot \cos a' = r \cdot \cos a \Rightarrow r' = r \frac{\cos a}{\cos a'}$$

Sustituyendo en la primera expresión, y teniendo en cuenta que el ángulo de presión de funcionamiento α' , es común a las dos ruedas del engranaje, y que el de referencia α , está normalizado y tiene un valor constante, se tiene que:

$$a' = (r_1 + r_2) \frac{\cos a}{\cos a'}$$

En el caso de ruedas montadas a cero, al ser $\alpha' = \alpha$, se tiene que:

$$a' = r_1 + r_2 = a$$

En engranajes montados en V, para conseguir un funcionamiento sin holgura circunferencial, que ocasionaría golpeteos entre los dientes, se procura que la suma de los espesores de ambas ruedas sea igual al paso en la circunferencia primitiva de funcionamiento. Dicho paso puede expresarse como:

$$p' = \frac{2pr'}{z}$$

Y como, según se acaba de ver

$$r' = r \frac{\cos a}{\cos a'}$$

y teniendo en cuenta que

$$m = \frac{2r}{z} \Rightarrow r = \frac{mz}{2}$$

se tiene que:

$$r' = \frac{mz}{2} \frac{\cos a}{\cos a'} \Rightarrow p' = \frac{2p}{z} \frac{mz}{2} \frac{\cos a}{\cos a'} = mp \frac{\cos a}{\cos a'}$$

Igualando esta cantidad a la suma de los espesores de los dientes de ambas ruedas, medidas en las circunferencias primitivas de funcionamiento:

$$s'_1 + s'_2 = 2 \cdot r'_1 \left[\frac{p}{2z_1} + 2 \frac{x_1}{z_1} \operatorname{tg} a' + Eva - Eva' \right] + 2 \cdot r'_2 \left[\frac{p}{2z_2} + 2 \frac{x_2}{z_2} \operatorname{tg} a' + Eva - Eva' \right]$$

$$\text{Y como } r' = \frac{mz}{2} \frac{\cos a}{\cos a'}$$

$$\begin{aligned} s'_1 + s'_2 &= 2 \frac{mz_1}{2} \frac{\cos a}{\cos a'} \left[\frac{p}{2z_1} + 2 \frac{x_1}{z_1} \operatorname{tg} a' + Eva - Eva' \right] + \\ &2 \frac{mz_2}{2} \frac{\cos a}{\cos a'} \left[\frac{p}{2z_2} + 2 \frac{x_2}{z_2} \operatorname{tg} a' + Eva - Eva' \right] = \\ &= m \frac{\cos a}{\cos a'} \left[\frac{p}{2} + \frac{p}{2} + 2 \cdot (x_1 + x_2) \operatorname{tg} a' + (z_1 + z_2) \cdot (Eva - Eva') \right] \end{aligned}$$

Igualando p' con s'_1 + s'_2, queda:

$$\begin{aligned} mp \frac{\cos a}{\cos a'} &= m \frac{\cos a}{\cos a'} \left[\frac{p}{2} + \frac{p}{2} + 2 \cdot (x_1 + x_2) \operatorname{tg} a' + (z_1 + z_2) \cdot (Eva - Eva') \right] \Rightarrow \\ &2 \cdot (x_1 + x_2) \operatorname{tg} a' + (z_1 + z_2) \cdot (Eva - Eva') = 0 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$Eva' = 2 \frac{x_1 + x_2}{z_1 + z_2} \operatorname{tg} a + Eva$$

De la ecuación anterior se despeja el ángulo de presión de funcionamiento necesario para que no exista juego lateral, y a partir de él se calculan los radios primitivos de funcionamiento y la distancia entre ejes.

Por otro lado, en un montaje en V no se mantiene el juego radial de referencia. Para que se mantuviera sería preciso montar las ruedas a una distancia a_0 , tal que la línea de referencia de la cremallera de talla coincidiera en ambas ruedas. Esa distancia, a_0 , podría expresarse en la forma:

$$a_0 = (r_1 + mx_1) + (r_2 + mx_2) = r_1 + r_2 + (x_1 + x_2) \cdot m$$

Multiplicando y dividiendo por $2(z_1 + z_2)$:

$$a_0 = r_1 + r_2 + 2 \frac{x_1 + x_2}{z_1 + z_2} \cdot \frac{m}{2} \cdot (z_1 + z_2)$$

Y como

$$m = \frac{2r}{z} \Rightarrow \frac{mz}{2} = r \Rightarrow \frac{m}{2} (z_1 + z_2) = r_1 + r_2$$

Y de aquí se deduce que

$$a_0 = (r_1 + r_2) + 2(r_1 + r_2) \frac{x_1 + x_2}{z_1 + z_2} = (r_1 + r_2) \left[1 + 2 \frac{x_1 + x_2}{z_1 + z_2} \right]$$

En consecuencia, al montar ruedas a la distancia a' de modo que se elimine el juego circunferencial, el juego radial disminuye en el valor $(a_0 - a')$. Para evitar esta disminución del juego radial, en algunas ocasiones se realiza un rebaje en la cabeza de los dientes.

1.16 LONGITUD DE ACERCAMIENTO, LONGITUD DE ALEJAMIENTO Y LONGITUD DE ENGRANE.

En la figura se ha esquematizado el engrane de dos ruedas, 1 y 2, de un engranaje paralelo exterior en un plano perpendicular a sus ejes. Sabemos que la línea de engrane es una recta que pasa por el punto de rodadura, C' , y es tangente a los dos círculos de base. Sabemos también que esta línea de engrane forma un ángulo α' (ángulo de presión de funcionamiento) con la tangente común a las dos circunferencias primitivas de funcionamiento. Las circunferencias de cabeza de ambas ruedas determinan sobre la línea de engrane los extremos del segmento dentro del que se realiza el engrane.

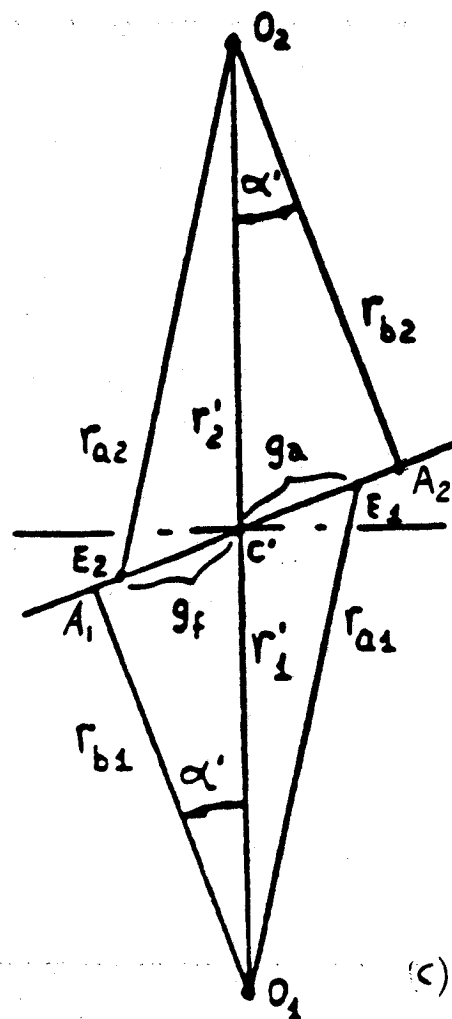


Figura 1.16.1

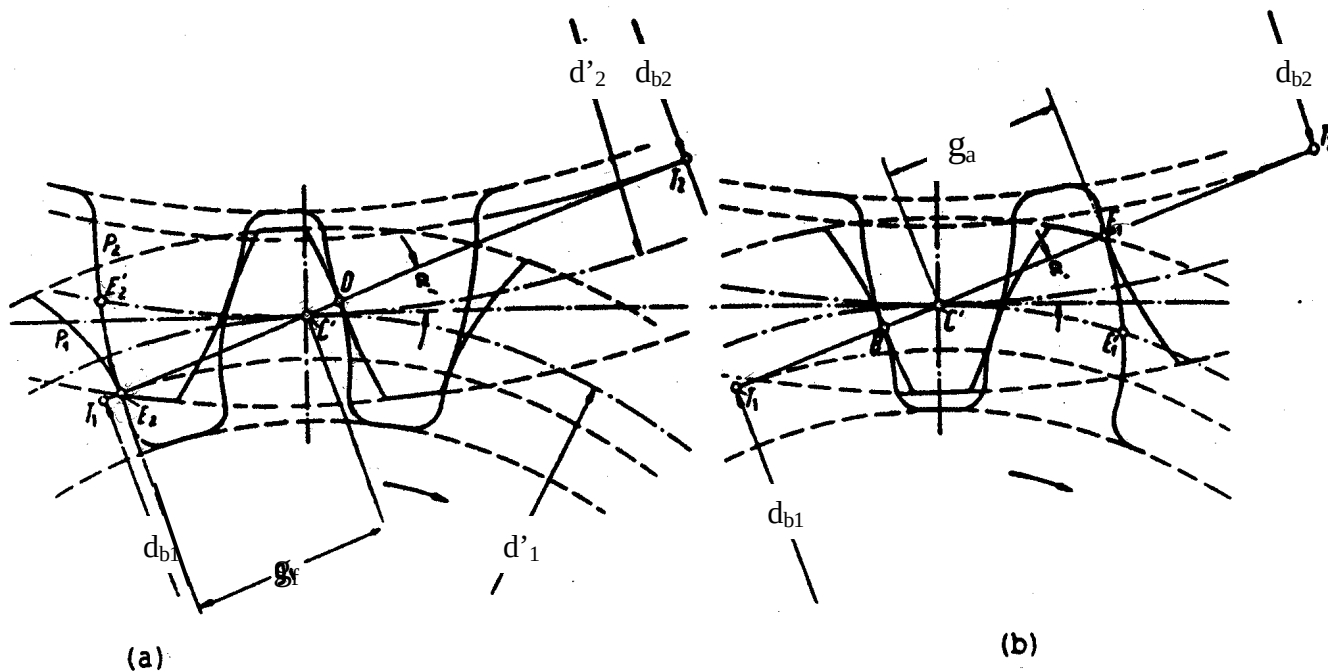


Figura 1.16.2

Supongamos que la rueda 1 es la motriz y que gira en el sentido indicado en las figuras.

Consideremos el engrane de una pareja de perfiles conjugados P_1 y P_2 . La figura (a) representa el momento del inicio del engrane: el perfil P_2 es atacado en cabeza por el perfil P_1 . El punto de inicio del engrane, E_2 , es el punto de intersección de la línea de engrane con la circunferencia de cabeza de la rueda no motriz.

El periodo de acercamiento es aquel comprendido entre el instante en el que se inicia el engrane, representado en la figura (a), y el instante en que el contacto se realiza en el punto de rodadura, C' . Durante el período de acercamiento, el punto de contacto recorre el segmento E_2C' . El arco girado por la circunferencia primitiva de funcionamiento durante el período de acercamiento viene dado por el arco E_2C' . Por las propiedades de la evolvente de círculo, el arco girado por la circunferencia básica durante el período de acercamiento tiene una longitud igual a la del segmento E_2C' . A la longitud de este segmento se le llama **longitud de acercamiento, g_f** .

$$g_f = \overline{E_2C'}$$

El período de alejamiento es aquel comprendido entre el instante en el que el contacto se realiza en el punto C' y el instante en el que termina el engrane, representado en la figura (b). Durante el período de alejamiento, el punto de contacto recorre el segmento $C'E_1$. El arco girado por la circunferencia primitiva de funcionamiento durante el período de alejamiento viene dado por el arco $C'E_1$. Por las propiedades de la evolvente de círculo, el arco girado por la circunferencia básica durante el periodo de alejamiento tiene una longitud igual al segmento $C'E_1$. A la longitud de este segmento se la llama **longitud de alejamiento, g_a** .

$$g_a = \overline{C'E_1}$$

De acuerdo con las figuras anteriores, las longitudes de acercamiento y de alejamiento pueden obtenerse respectivamente por medio de las expresiones siguientes:

$$g_f = \overline{E_2 A_2} - \overline{C' A_2} = \sqrt{r_{a2}^2 - r_{b2}^2} - r'_{2} \sin a'$$

$$g_a = \overline{E_1 A_1} - \overline{C' A_1} = \sqrt{r_{a1}^2 - r_{b1}^2} - r'_{1} \sin a'$$

Por todo esto, el arco de conducción medido en circunferencia básica, llamado **longitud de engrane, g_a** , puede obtenerse de la expresión siguiente:

$$g_a = E_2 E_1 = g_f + g_a$$

Como $E_2 E_1$ es igual al arco girado, medido en circunferencia básica, por semejanza entre arcos se tiene que:

$$\frac{\overline{E_2 E_1}}{r_b} = \frac{E'_2 \overset{\cap}{E'_1}}{r'} \Rightarrow E'_2 \overset{\cap}{E'_1} = \overline{E_2 E_1} \frac{r'}{r_b}$$

Y como $E_2 E_1 = g_a$, y además en la figura se ve que

$$\cos a' = \frac{r_b}{r'}$$

se llega a la siguiente expresión para el arco de conducción:

$$E'_2 \overset{\cap}{E'_1} = \frac{g_a}{\cos a'}$$

1.17 GRADO DE RECUBRIMIENTO O COEFICIENTE DE ENGRANE

La Figura 1.16.2 (a) muestra el instante en el que una pareja inicia su contacto en el punto E_2 . La pareja que le ha precedido en el engrane se encuentra en ese instante contactando en el punto D. El segmento $E_2 D$, por las propiedades de la evolvente de círculo, es el paso medido en la circunferencia básica, ya que antes de girar ese ángulo el otro diente estaba engranando en E_2 .

$$\overline{E_2 D} = p_b = \frac{2pr_b}{z} = mp \cos a$$

La Figura 1.16.2 (b) muestra el instante en que una pareja llega al final del engrane en el punto E_1 . La pareja que le sigue en el engrane se encuentra en ese momento contactando en el punto B. El segmento BE_1 , por las propiedades de la evolvente de círculo, es el paso medido en circunferencia básica.

$$\overline{BE_1} = p_b = \frac{2pr_b}{z} = mp \cos a$$

Para que haya continuidad en la transmisión es preciso que antes de que una pareja termine su transmisión contactando en el punto E_1 , otra pareja haya iniciado su

contacto en el punto B; es decir, es preciso que el arco de conducción sea superior al paso, para que en el segmento E_1E_2 haya más de una pareja de dientes en contacto.

El **grado de recubrimiento, e** , se define como el cociente entre el segmento de engrane y el paso. Para que exista continuidad en el engrane es preciso que el grado de recubrimiento sea superior a 1.

$$e = \frac{\overline{E_2E_1}}{mp \cos a} = \frac{g_a}{mp \cos a}$$

La porción del grado de recubrimiento debida a la rueda 1 es:

$$e_1 = \frac{\overline{C'E_1}}{mp \cos a} = \frac{g_a}{mp \cos a}$$

Y la debida a la rueda 2 es:

$$e_2 = \frac{\overline{E_2C'}}{mp \cos a} = \frac{g_f}{mp \cos a}$$

BIBLIOGRAFÍA

- 1.- Henriot Georges, "Traité théorique et pratique des engrenages". Editorial. Dunod. ISBN. 2-04-015607
2. Lafont, Pilar, "Cálculo de engranajes paralelos". Sección de Publicaciones de la E.T.S.I.I.M., Madrid, 1991.
3. Lamadrid Martinez de, Adelardo y Corral Saiz de, Antonio, "Cinemática y dinámica de máquinas", Sección de Publicaciones de la E.T.S.I.I.M., 1983.
4. Aguirre Esponda, Guillermo, "Diseño de elementos de máquinas". Ed. Trillas, México, 1990.
5. Shigley, E. J. y Mischke, Ch. R., "Diseño en ingeniería mecánica". Ed. McGraw-Hill, 1990.
6. Norton, R. L., "Diseño de maquinaria". Ed. McGraw-Hill, 1995.
7. Deutschman, A. D., Michels W. J., and Wilson C. E., "Machine Design; theory and practice". Macmillan Publishing Co., Inc, New York, 1975.
8. Martin, J. H., "Kinematics and Dynamics of Machines". McGraw-Hill, 1982.
9. Kimbrell, J. T., "Kinematics Analysis and Synthesis". McGraw-Hill, 1991.
10. Kepler H. B., "Basic Graphical Kinematics". Ed. Glencoe Division Macmillan/McGraw-Hill, 1993.
10. krutz, G. W., Schueller, J. K. and Claar, P. W., " Machine Design for Mobile and Industrial Applications". Society of Automotive Engineers, Inc, 1994.