Integración Numérica

Integración Numérica

- Integral definida: Cálculo
- Fórmula de los Trapecios
- Regla de Simpson
- Integración de Romberg
- Otros métodos (Newton-Cotes, Gauss)

Integral definida: Cálculo

- Regla de Barrow

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

- Pero...
  - Funciones sin primitiva sencilla

$$\int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} dx \qquad \int_0^t e^{-x^2} dx$$

  - Datos experimentales: área de un terreno.

Fórmula de los Trapecios

- Simple

$$\boxed{I_T = (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}}$$

- Error

$$\boxed{E_T = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\xi), \quad \xi \in [a,b]}$$

Fórmula de los Trapecios

- Compuesta

$$I_T[h] = \frac{h}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \cdots + 2y_{n-1} + y_n)$$

- Error

$$\boxed{E_T = -\frac{h^2}{12}(b-a)f''(\xi), \quad \xi \in [a,b]}$$

- Exacta para funciones de 1er grado

Algoritmo TRAPECIO

Integra aproximadamente f(x) en el intervalo [a,b] aplicando la fórmula de los trapecios con n subintervalos.

- Datos de entrada: a,b,n
- Proceso
  - Dividir el intervalo en n subintervalos
  - Evaluar la función en los extremos de los subintervalos
  - Aplicar la formula de los trapecios:

$$I_T[h] = h/2(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \ldots + 2y_{n-1} + y_n)$$

- Salida: Integral aproximada

Indicación: usar vectores en lugar de bucles para evaluar la Fórmula de los Trapecios.

Fórmula de Trapecios iterativa

- Supongamos que n es par:

$$I_T[h] = h/2\ (y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \ldots + 2y_{n-1} + y_n) =$$

$$= h/2\ (y_0 + 2y_2 + 2y_4 + \ldots + 2y_{n-2} + y_n) +$$
$$+\ h\ (y_1 + y_3 + y_5 + \ldots + y_{n-1}) =$$

$$= I_T[2h]/2 + h(y_1 + y_3 + \ldots + y_{n-1})$$

- Refinar la partición y actualizar la integral

Algoritmo TRAPITER

Refina iterativamente la partición del intervalo [a,b] y actualiza la Fórmula de los Trapecios para aproximar la integral de f(x) hasta una precisión determinada.

- Datos de entrada: a, b, n, tol.
- Inicio: I = trapecio(a,b,n)
- Iteraciones:

```
mientras error > tol
    dividir en 2 cada intervalo
    x = nuevos puntos, y = f(x)
    Inueva = I/2 + h*sum(y)      % Actualización de la
    error = abs(I-Inueva)        %  integral
    I = Inueva
fin mientras
```

Regla de Simpson simple

(x_0,y_0), (x_1,y_1), (x_2,y_2) con $x_1=x_0+h$, $x_2=x_1+h$

◆ Polinomio de diferencias progresivas

$P(t)= y_0+(y_1-y_0)t+1/2(y_0-2y_1+y_2)t(t-1)$; $ht=x-x_0$

◆Integral

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx \approx \int_0^2 hP(t)dt = \frac{h}{3}(y_0+4y_1+y_2) = I_S[h]$$

Regla de Simpson

- Compuesta

$$I_S[h] = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + \cdots + 4y_{n-1} + y_n)$$

- Error

$$E_S = -\frac{h^4}{180}(b-a)f^{IV}(\xi), \quad \xi \in [a,b]$$

- Exacta para polinomios de 3er grado

Integración de Romberg

- Relación Simpson-Trapecio par 2^n subdivisiones de [a, b].

$$I_S[h] = \frac{4I_T[h] - I_T[2h]}{3}$$

Tabla de Romberg

$$
\begin{array}{cccc}
I_T[h] & & & \\
I_T[h/2] & I_S[h/2] & & \\
I_T[h/4] & I_S[h/4] & I_R[h/4] & \\
I_T[h/8] & I_S[h/8] & I_R[h/8] & I_Q[h/8] \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}
$$

- Expresión general: $$I_{kj} = \frac{4^{j-1} I_{k,j-1} - I_{k-1,j-1}}{4^{j-1} - 1}$$
- Error de orden h^{2j}
- Exacta para polinomios de grado 2j-1

Algoritmo ROMBERG

- Integra f(x) en [a,b], aplicando el método de Romberg.
  Datos de entrada: a,b,n,tol
- Proceso: Construccion de la tabla de Romberg

```
k = 1, I(1,1) = trapecio(a,b,n);                    % Fila 1
mientras error > tol
        k = k+1                                     % Fila k
        dividir en 2 cada subintervalo
        x = nuevos puntos, y = f(x)
        I(k,1) = I(k-1,1)/2 + h*sum(y)
        para j = 2 : k          % Aplica el método de Romberg
                I(k,j) = (4^(j -1)*I(k,j -1) - I(k -1,j -1)) / (4^(j -1) -1)
        fin para
        error = abs(I(k,j) - I(k,j -1))
fin mientras
```

Método de Newton-Cotes

- Dados $x_0, x_1, x_2, ..., x_n$ en [a,b], determinar $A_0, A_1, A_2, ..., A_n$ tales que para todo polinomio p(x) de grado $\leq$ n,

$$\int_a^b p(x)dx =$$

$$= A_0 p(x_0) + A_1 p(x_1) + \cdots + A_n p(x_n)$$

- Sustituyendo $p(x) = 1, x, x^2, ..., x^n$ se obtiene un sistema **lineal** del que se despejan $A_0, A_1, A_2, ..., A_n$

Cuadratura de Gauss

- Determinar puntos $x_0, x_1, x_2, ..., x_n$ en [a,b], y números $A_0, A_1, A_2, ..., A_n$ tales que, para todo polinomio p(x) de grado $\leq$ 2n+1,

$$\int_a^b p(x)dx =$$

$$= A_0 p(x_0) + A_1 p(x_1) + \cdots + A_n p(x_n)$$

- Sustituyendo $p(x) = 1, x, x^2, ..., x^{2n+1}$ se obtiene un sistema **no lineal** del que se despejan $x_0, x_1, x_2, ..., x_n$ y $A_0, A_1, A_2, ..., A_n$.

Resumen

- Los métodos de Trapecios, Simpson y Romberg permiten estimar la integral con error de orden n^2, n^4, n,... . Usan nodos equiespaciados, incluyendo los extremos del intervalo. Son casos particulares de Newton-Cotes.

- El método de Gauss usa nodos desigualmente espaciados, distintos de los extremos del intervalo.