

**ECUACIONES DIFERENCIALES
ORDINARIAS**

Y

**SISTEMAS DE ECUACIONES
DIFERENCIALES
ORDINARIAS**

GENERALIDADES.

1. Introducción.

Muchos problemas de la Física, la Ingeniería y muchas otras ramas del saber humano conducen de forma natural a ecuaciones diferenciales: problemas de la Mecánica, problemas dinámicos, problemas de estructuras, problemas de circuitos eléctricos y electromagnetismo, modelos poblacionales, etc., etc.

En el caso más sencillo se desea obtener una función $y = y(x)$ en un intervalo $[a,b]$, cuya derivada $y'(x)$ es conocida como función de x . Es decir, se trata del problema

$$\text{Hallar } y(x) : y'(x) = f(x), x \in [a,b] \quad (\text{P1})$$

Del cálculo elemental se sabe que si $y_p(x)$ es una solución de (P1), también lo es $y(x) = y_p(x) + k$, para cada real k . Las técnicas elementales de integración permiten obtener en algunos casos una primitiva de $f(x)$, que posibilita la construcción de la solución general de la ecuación diferencial

$$y(x) = \int f(x)dx + k$$

y conociendo el valor de y en algún punto, por ejemplo a , puede determinarse una de entre las infinitas soluciones del problema

$$y(x) = y(a) + \int_a^x f(t)dt$$

Sin embargo, no siempre es posible, con los métodos elementales, obtener una primitiva de $f(x)$. Este es el caso de $f(x) = \text{sen}x/x$, entre otros. La teoría del Cálculo Integral asegura, no obstante, la existencia de primitivas para esta función. El problema es que no se conocen expresiones, 'fórmulas', al menos sencillas, para expresar tales primitivas. Pero la 'sencillez' es un concepto relativo. Hay personas para las que todo lo que no son sumas y restas no es sencillo (también éste es el caso del ordenador). Otras pueden operar con productos, divisiones, potencias, radicales. Otras, con funciones trascendentes.

Realmente $y(x) = \int_a^x \frac{\text{sen} t}{t} dt$ no es una fórmula sencilla para quien no conoce la operación de integrar.

Sin embargo, para un ordenador debidamente instruido, el cálculo de $y(x) = \int_a^x \frac{\text{sen} t}{t} dt$ para un $x \in [a,b]$ no representa más dificultad que el cálculo de $\text{sen}x/x$. Quizá, en todo caso, deba realizar más sumas y restas para obtener $y(x)$, que para obtener $\text{sen}x/x$.

Por otra parte, el conocimiento de que $\text{sen}x/x$ es la derivada de cierta función ya proporciona, si se utilizan ideas adecuadas, una información importante sobre dicha función. Así que la necesidad de diseñar métodos numéricos e instruir adecuadamente al ordenador para que resuelva de manera aproximada tales problemas es obvia; pero aplicar métodos numéricos sin un análisis previo del problema puede resultar estéril.

Avancemos un poco más en dificultad. La mayor parte de ecuaciones diferenciales ordinarias, las más interesantes, no expresan la derivada de $y(x)$ en función sólo de x , sino también en función de la propia función incógnita $y(x)$. Así, un problema más interesante que P1, a la vez que menos sencillo, es

$$\text{Hallar } y(x) : y'(x) = f(x,y), x \in [a,b] \quad (\text{P2})$$

Como para el caso de (P1), bajo ciertos requerimientos, puede probarse que existen infinitas funciones que satisfacen la ecuación diferencial $y' = f(x,y)$, aunque ahora no difieren necesariamente sólo en una constante; y con información adicional, como el valor de y en a , es posible, a veces, determinar una de ellas. Obviamente, el proceso de obtención de esas soluciones, si es posible diseñarlo, será mucho más

complejo que el de la simple integración. De hecho en la **integración de una ecuación diferencial**, - cuando se puede llevar a cabo de manera directa-, se realizan una o varias integraciones elementales. En consecuencia, no cabe esperar un método universal de solución de ecuaciones diferenciales.

Por tanto, es imprescindible disponer de métodos numéricos adecuados, pero, repetimos de nuevo, el análisis previo al problema es el mejor, a veces único, punto de partida. La presente práctica se dedica a proporcionar un primer recorrido por los métodos de análisis y numéricos más elementales.

Analicemos previamente cómo se presentan los problemas que modelizan los distintos fenómenos.

2. Tipos de problemas planteados.

2.1 Problemas de valor inicial.

En la Práctica los problemas modelizados con ecuaciones diferenciales se presentan con una información adicional que, a veces, permite determinar una de entre todas las soluciones. Por ejemplo, para determinar el espacio $x(t)$ recorrido por un móvil que se desplaza a velocidad $v(t)$ se integra la velocidad; pero es necesario conocer el punto de partida $x(t_0)$, lo que generalmente es un dato; así, si se conoce una primitiva, $x(t)$, de $v(t)$, el espacio recorrido es $x(t) - x(t_0)$.

Este tipo de problemas es conocido como **problemas de valor inicial (PVI)**. En un PVI se busca una solución $y(t)$ de una ecuación diferencial, tal que para determinados valores t_0, y_0 , satisface una **condición inicial** $y(t_0) = y_0$. Frecuentemente t_0 es el punto inicial del intervalo $[a, b]$.

En general, en vez de sólo una ecuación, se consideran **sistemas de n ecuaciones diferenciales ordinarias**

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(t, y_1, \dots, y_n) \\ &\dots \\ y_n' &= f_n(t, y_1, \dots, y_n) \end{aligned}$$

para n funciones reales $y_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$ de variable real. Estos sistemas pueden ser escritos con notación vectorial de manera semejante al caso de una ecuación,

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t))$$

donde $\mathbf{y}(t)$ es el vector columna de componentes $y_i(t)$, $\mathbf{f}(t, \mathbf{y})$ es una función vectorial de componentes $f_i(t, y_1, \dots, y_n)$ e $\mathbf{y}'(t)$ es el vector columna de las derivadas de las $y_i(t)$.

Análogamente al caso de una ecuación, dados números $t_0, y_{10}, \dots, y_{n0}$, la expresión $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0$, donde $\mathbf{y}_0 = (y_{10}, \dots, y_{n0})^t$, se dice que es una condición inicial para el sistema.

Cuando en una ecuación diferencial aparecen derivadas de $y(t)$ de orden $m > 1$, la **ecuación diferencial de orden m** a resolver es

$$y^{(m)}(t) = f(t, y, y', \dots, y^{(m-1)})$$

Una condición inicial para tal ecuación proporciona valores de $y, y', \dots, y^{(m-1)}$ en un punto $t \in [a, b]$, usualmente a .

Introduciendo las funciones auxiliares,

$$\begin{aligned}
z_1(t) &:= y(t) \\
z_2(t) &:= y'(t) \\
&\dots \\
z_m(t) &:= y^{(m-1)}(t)
\end{aligned}$$

la ecuación de orden m se transforma en un sistema de primer orden equivalente

$$\begin{aligned}
z_1'(t) &= z_2(t) \\
z_2'(t) &= z_3(t) \\
&\dots \\
z_m'(t) &= f(t, z_1, \dots, z_m)
\end{aligned}$$

Con el cambio dado, la condición inicial $y(t_0) = y_0$, $y^{(i)}(t_0) = y_i$, $i = 1, \dots, m - 1$, se transforma en $z_i(t_0) = y_{i-1}$, $i = 1, \dots, m$.

2.2 Problemas de frontera.

Además de los problemas de valor inicial, también son muy frecuentes los **problemas con condiciones de contorno o problemas de frontera (PF)**. El objetivo es hallar una solución del sistema de n ecuaciones diferenciales $y'(t) = f(t, y)$ que satisfaga ciertas condiciones en los extremos del intervalo, llamadas **condiciones de contorno**, del tipo

$$\begin{aligned}
c_1(y(a)) &= 0 \\
c_2(y(b)) &= 0
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
c_1(g) &:= (c_{11}(g), \dots, c_{1m}(g))^t \\
c_2(h) &:= (c_{21}(h), \dots, c_{2(n-m)}(h))^t
\end{aligned}$$

son vectores de m y $n-m$ funciones, respectivamente, c_{1i} y c_{2j} de n variables $g = (g_1, \dots, g_n)$ y $h = (h_1, \dots, h_n)$.

Por ejemplo, para una ecuación de segundo orden, de gran importancia en muchos fenómenos físicos, se busca una solución $y(t)$ del problema de contorno

$$\begin{aligned}
y'' &= f(x, y, y') \quad x \in [a, b] \\
c_{11}y(a) + c_{12}y'(a) &= \alpha \\
c_{21}y(b) + c_{22}y'(b) &= \beta
\end{aligned}$$

donde α y β son números reales, que puede ser fácilmente escrito en forma de un sistema; mediante el cambio $z_1 = y$, $z_2 = y'$, el problema de frontera de orden 2 anterior, se escribe

$$\begin{aligned}
z_1' &= z_2 \\
z_2' &= f(x, z_1, z_2) \\
c_{11}z_1(a) + c_{12}z_2(a) &= \alpha \\
c_{21}z_1(b) + c_{22}z_2(b) &= \beta
\end{aligned}$$

3. Métodos numéricos para EDO.

Los métodos analíticos, como hemos visto, son insuficientes para resolver los problemas más interesantes. Sin embargo, no suele ser fructífero abordar un problema numérico sin introspección analítica previa. Aun sin saber resolver una ecuación diferencial, mediante el análisis, es posible obtener información sobre ella que, a veces, es más importante que la propia solución. La llamada teoría cualitativa, por ejemplo, está precisamente dedicada a investigar la ‘cualidad’, es decir, las propiedades, de las soluciones de una ecuación diferencial, sin conocer tales soluciones.

3.1 Clasificación.

Para los problemas de valor inicial, podemos clasificar los métodos en:

- a) Métodos de pasos libres,
- b) Métodos de pasos ligados, que pueden ser explícitos o implícitos, y
- c) Métodos de extrapolación de Richardson, método de Bulirsch-Stoer.

Para los problemas de contorno distinguiremos

- d) Métodos de disparo (simple y múltiple)
- e) Métodos de diferencias finitas y
- f) Métodos variacionales.

Para el caso de un PVI escalar consideraremos el problema

$$y' = f(t, y), \quad t \in [a, b], \quad y(a) = y_0$$

donde y es una función real. Este problema servirá de modelo para exponer la forma general de proceder en un método numérico para integrar una ecuación diferencial. La generalización a sistemas será inmediata.

3.2 Fundamento.

Al resolver un PVI o un PF, el objetivo es hallar una función $y(t)$ que verifique en $[a, b]$ los requisitos del problema. Conscientes de la imposibilidad de obtener una fórmula que exprese $y(t)$, nos contentaremos con obtener los valores que la solución toma en algunos puntos de $[a, b]$; es decir, obtendremos una tabla de valores de $y(t)$ en $[a, b]$. Esto puede parecer, a primera vista, frustrante, pero para la mayor parte de las necesidades reales es completamente suficiente; pensemos que realmente, incluso para una función expresada mediante una fórmula, un ordenador solo puede dar sus valores en un número finito de puntos, ya que maneja un número limitado de cifras. El valor de la solución en un punto c distinto de los considerados se obtiene mediante interpolación, o resolviendo de nuevo el problema en el intervalo $[a, c]$.

Así, una técnica de solución consiste en **dividir** el intervalo $[a, b]$ mediante una **mall**a de puntos $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$, llamados **puntos soporte**, y obtener los valores $y_i = y(t_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$, de la solución en los puntos de la mall

Una manera frecuente y sencilla (no la mejor en todos los casos) de tomar los t_i , consiste en dividir el intervalo $[a, b]$ en n partes iguales, siendo n un natural. Así, los puntos son $t_i = a + ih$, $i = 0, \dots, n$. Al valor $h = (b - a)/n$ se lo denomina **paso** de integración. Utilizaremos en lo sucesivo paso constante en todos los casos.

Sin embargo, las técnicas más eficientes requieren de un ajuste adaptativo del paso, acomodándose continuamente al comportamiento de la solución en las cercanías del punto de cálculo actual; por ejemplo, si se sospecha que la solución es rápidamente variable será necesario disminuir el paso, lo que

supone realizar más operaciones y estar sujeto a errores de redondeo; pero si la solución varía poco, con pasos más largos se obtendrán buenas aproximaciones y se ahorrará esfuerzo computacional y evitará innecesarios errores de redondeo.

Observemos que, en todo caso, lo que se obtiene es una aproximación de la solución. Esta aproximación depende fuertemente del paso empleado. Para enfatizar la estrecha dependencia de la solución respecto al paso utilizado, se escribe a veces $y(t,h)$. Veremos este hecho con detalle, ya que de la elección adecuada del paso depende fuertemente la precisión de la solución obtenida, por lo que es un elemento de suma importancia.

3.3.Ejemplos.

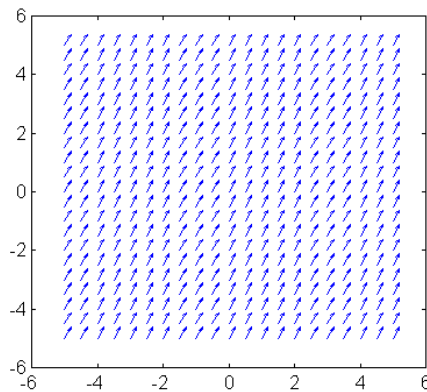
Sin pretender ser completamente exhaustivos, he aquí una lista suficientemente amplia, como para ver el alcance de la modelización con ecuaciones diferenciales, que se aplican a campos como circuitos eléctricos, sistemas mecánicos, desintegración radioactiva, movimiento descendente de cuerpos, movimiento pendular, velocidad de proyectiles y cohetes, enfriamiento de cuerpos, interés compuesto, movimiento en un plano inclinado, modelos de poblaciones (personas, peces, bacterias, ...), mezclas y disoluciones, salida de líquidos por orificios, comportamiento de gases confinados y en movimiento, absorción de la luz, espesor de capas de sólidos en formación o destrucción, crecimiento de gotas, flotación de barcos, movimiento en fluidos viscosos, resistencia de materiales, problemas epidemiológicos, detección de falsificaciones de obras de arte, comportamiento de alas de aviones, difusión en medios porosos, electromagnetismo, dispersión de contaminantes en la atmósfera y en medios submarinos, distribución de calor en placas y sólidos, absorción de medicamentos, flujo a presión en tuberías, flujo en canales abiertos, pérdidas de peso, determinación del momento de un asesinato, estrategias en tiempo de guerra y de paz, movimiento planetario, reacciones y equilibrios químicos, resonancia en sistemas eléctricos e hidráulicos, efecto de la publicidad, guía de misiles, comportamiento de semiconductores, células solares, fibras ópticas, guías de ondas, etc.

I. METODOS NUMERICOS PARA EDO's.

1. Campos de vectores. Método gráfico.

Simplemente el valor numérico que la función $f(t,y)$ toma en los puntos del plano puede ser una información interesante sobre las soluciones de una EDO. Concentrémonos en la siguiente observación: para la ecuación diferencial $y' = f(t,y)$, la función $f(t,y)$ da, para cada punto (t,y) del plano perteneciente al dominio de f , la derivada de la función solución $y(t)$ que pasa por dicho punto. Recordando que la derivada de una función en un punto es el valor de la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en dicho punto, vemos cómo, aun no conociendo las soluciones $y(t)$, sí conocemos cómo tales soluciones 'pasan' por los puntos del plano. Quizá recopilando esta información para muchos puntos se podría tener una idea de cómo se comportan y/o cómo son las soluciones.

Por ejemplo, la gráfica siguiente representa el campo de vectores de la ecuación diferencial $y' = 2$. Obsérvese cómo en cada uno de los puntos elegidos (en este caso han sido $t=-5:0.5:5$ e $y=-5:0.5:5$) se dibuja un pequeño segmento de la recta tangente a la curva-solución que pase por dicho punto; en este caso son rectas de pendiente 2, ya que la ecuación diferencial es $y' = 2$.



Ejercicio 1. Represente el campo de vectores para la ecuación diferencial de orden 1 $y' = 2$, con el que se ha obtenido la gráfica anterior. (Utilice las primitivas `meshgrid` y `quiver` de Matlab. La primera para obtener la malla de puntos y la segunda para dibujar el campo de vectores). Recoja el trabajo en un script `campo.m` con variables de entrada los vectores `t` e `y`.

Considere, ahora, las siguientes ecuaciones diferenciales.

- | | | | |
|----------------|-----------------|------------------------|------------------------------------|
| 1) $y' = 0.5;$ | 2) $y' = t;$ | 3) $y' = \text{sent};$ | 4) $y' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} ;$ |
| 5) $y' = y/t;$ | 6) $y' = -t/y;$ | 7) $y' = -y/t;$ | 8) $y' = y.$ |

Generalice su función para que pueda representar el campo de vectores para cualquier ecuación de las dadas. En cada caso diseñe una malla de puntos en el plano.

Ejercicio 2. Resuelva mediante integración simple las 4 primeras ecuaciones, que son del tipo (P1). Dibuje algunos elementos de la familia de las curvas solución en cada caso sobre el campo de vectores y compruebe que el campo de vectores que representa tiene alguna relación con las curvas-solución.

Ejercicio 3. A la vista del campo de vectores dibujado en los casos 5-8, conjeture la forma general de la solución (intente, al mirar 'desde lejos' a la pantalla, adivinar circunferencias, elipses, hipérbolas u otras gráficas familiares). Escriba la ecuación de la familia de curvas que cree haber adivinado. Compruebe si

su conjetura es buena sustituyendo en la ecuación diferencial correspondiente, o, si sabe cómo hacerlo, obtenga la solución de las ecuaciones y compare con su conjetura.

2. Métodos numéricos básicos.

2.1 El método de Euler

El método más elemental de resolución de

$$y' = f(x, y), x \in [a, b], \quad y(a) = y_0$$

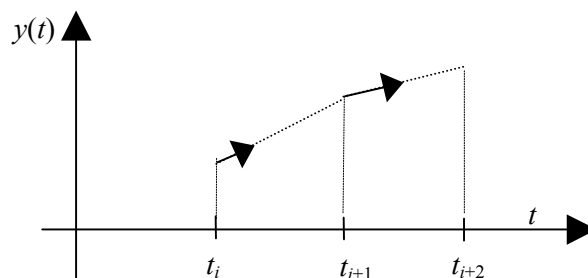
es conocido con el nombre de **método de Euler** o **método del polígono de Euler**. Consiste en aproximar el valor de $y_i = y(t_{i+1})$ a partir del valor $y_i = y(t_i)$, supuesto ya conocido, mediante

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) \quad (E)$$

que es otra forma de escribir

$$\frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{h} = f(x_i, y_i)$$

y que expresa el hecho de que la derivada de y en t , dada por $f(t_i, y_i)$ puede ser aproximada mediante el cociente incremental. Es decir en (t_i, y_i) se traza 'la tangente' y se toma como valor de y_{i+1} el que toma tal tangente en t_{i+1} . Vea la figura.



Ejercicio 4. Considere el problema

$$y' = -2x^3 + 12x^2 - 20x + 8.5, x \in [0,4], \quad y(0) = 1$$

que tiene como solución exacta $z(x) = -0.5x^4 + 4x^3 - 10x^2 + 8.5x + 1$.

- Considere $h = 1$, lo que le permitirá obtener la solución por el método de Euler en los cinco puntos 0, 1, 2, 3 y 4. Observe que la condición inicial da la solución en 0. Halle consecutivamente el valor de la solución en los otros cuatro puntos utilizando la expresión (E) y almacénelos en un vector y cuya primera componente sea el valor de la condición inicial.
- Represente en el mismo gráfico la función $z(x)$ en $[0,4]$ y los valores contenidos en el vector y , unidos mediante segmentos rectos, lo que le permitirá comparar las soluciones. Observe que la dirección de los segmentos dibujados coincide aproximadamente con la dirección de la recta tangente a la curva en el punto de misma abscisa de acuerdo con la interpretación gráfica antes apuntada.

Ejercicio 5. Sistematice en una función `eul.m` los cálculos realizados de modo que pueda variar el número de puntos de cálculo o, lo que es lo mismo, la separación h entre ellos:

Elegido un paso h , o un natural n , el método de Euler es descrito por el siguiente algoritmo

- Dar $a, b, y_0 = y(a)$ y h (o n).
- Para $i = 1$ hasta n
 - Obtener $y_{i+1} = y_i + hf(t_i, y_i)$
 - Hacer $t_{i+1} = t_i + h$.
- Acabar para i .

Complete, finalmente, la tabla siguiente

paso h	1	0.5	0.25	0.1	0.01
$\max(z_i - y_i)$					

Un problema importante a estudiar en un curso de Cálculo Numérico consiste en determinar si $y(t; h_n)$ converge a $z(t)$, siendo $h_n = (b-a)/n$, cuando n tiende a infinito, es decir, cuando h tiende a 0, y con qué velocidad converge. La convergencia se describe en términos del **error de truncamiento** $e_i = z_i - y_i$ y la velocidad en la forma cómo e_i disminuye con respecto a h .

Ejercicio 5 (cont.). Responda a las siguientes preguntas.

- 1) ¿Observa alguna pauta de comportamiento del máximo error de truncamiento, $\max(|z_i - y_i|)$?
- 2) Establezca una relación del tipo $|e_i| \approx kh^p$, siendo k y p números reales (utilice su función `mincuaqr.m` obtenida en la práctica 9).

Estos hechos son de gran importancia en el estudio de la convergencia de los métodos numéricos. Considere las siguientes definiciones:

- a) Se dice que un método es convergente si $\lim_{h \rightarrow 0} \max_i |e_i| = 0$.
- b) Se dice que un método es de orden p si $|e_i| \leq kh^p$.

Ejercicio 5 (y fin). Responda ahora

- 3) ¿Puede decirse que el método de Euler, al menos para el caso estudiado parece que converge?
- 4) ¿De qué orden parece ser el método de Euler? ¿Cuál es el valor de la constante k ?

El método de Euler no es utilizado en la práctica porque no es preciso en comparación con otros métodos numéricos semejante que utilicen el mismo paso h . Pero conceptualmente es muy importante, ya que de una forma u otra los demás métodos se basan en su filosofía.

2.2 Otros métodos de pasos libres.

El método de Euler, ya visto, es un método típico de un paso. En general, estos métodos vienen determinados por una función

$$\phi(t, y, ; h; f)$$

utilizan un valor inicial, y consisten en obtener $y_{i+1} = y(t_{i+1})$, a partir de $y_i = y(t_i)$, mediante

$$y_{i+1} = y_i + h\phi(t, y; h; f)$$

Por ejemplo, en el método de Euler $\phi(t, y; h; f) = f(t, y)$, que no depende de h .

Para construir métodos más eficientes es necesario acudir a expresiones más complicadas de ϕ . Las expresiones utilizadas son del tipo

$$\phi(t, y; h; f) = a_1 f(t, y) + a_2 f(t + p_1 h, y + p_2 h f(t, y))$$

donde las constantes a_1, a_2, p_1 y p_2 se eligen adecuadamente.

Obviamente si $a_1 = 1$ y $a_2 = 0$ reencontramos el método de Euler.

Si se toma $a_1 = a_2 = 1/2$ y $p_1 = p_2 = 1$, se obtiene el llamado **método de Heun**, donde

$$\phi(t, y; h; f) = \frac{1}{2}(f(t, y) + f(t + h, y + hf(t, y)))$$

que necesita de dos evaluaciones de la función f en cada paso.

Cada paso puede ser descrito mediante los dos subpasos siguientes

$$\begin{aligned} k_{i+1} &= y_i + hf(t_i, y_i) \\ y_{i+1} &= y_i + \frac{1}{2}h(f(t_i, y_i) + f(t_i + h, k_{i+1})) \end{aligned} \quad (\text{H})$$

Gráficamente supone el sustituir la tangente a la curva en el punto (t, y) por la recta de pendiente igual a la media de las pendientes en (t, y) y $(t + h, y + hf(t, y))$, siendo este último punto el obtenido por el método de Euler.

Otra solución consiste en tomar $a_1 = 0, a_2 = 1, p_1 = p_2 = 1/2$. El método que se obtiene utiliza la función

$$\phi(t, y; h; f) = f\left(t + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2}f(t, y)\right)$$

y es conocido como **método de Euler modificado** o **método del punto medio**; en él se sustituye la tangente en (t, y) por la tangente en el punto de abscisa media entre t y $t + h$. También este método requiere dos evaluaciones de la función en cada paso, y puede ser descrito más claramente mediante los subpasos

$$\begin{aligned} k_{i+1} &= y_i + \frac{1}{2}hf(t_i, y_i) \\ y_{i+1} &= y_i + hf\left(t + \frac{h}{2}, k_{i+1}\right) \end{aligned} \quad (\text{EM})$$

Ambos métodos son de orden 2, y son poco empleados ante la superioridad, en general, del método de Runge-Kutta que se describe después.

Ejercicio 6. Obtenga funciones `eulmod.m` y `heun.m`, idénticas a `eul.m` salvo porque la ecuación (E) debe ser sustituida por (EM) o (H), respectivamente. Repita con cada una de ellas todo el ejercicio 5.

3. El método de Runge-Kutta.

El **método de Runge Kutta** se obtiene de una construcción más general que la de la función $\phi(t, y)$. Ahora esta función tiene la forma

$$\phi(t, y) = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

donde,

$$\begin{aligned}
 k_1 &= f(t, y) \\
 k_2 &= f\left(t + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2}k_1\right) \\
 k_3 &= f\left(t + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2}k_2\right) \\
 k_4 &= f(t + h, y + hk_3)
 \end{aligned}
 \tag{RK}$$

El método de Runge-Kutta es un método de cuarto orden y requiere cuatro evaluaciones de la función por paso. Parece, pues, que el método de Runge-Kutta será más interesante que los métodos de orden 2 en la medida en que el paso que utilice sea doble que para tales métodos. Esto es así, en general, aunque se debe tener presente que no siempre mayor orden en un método es sinónimo de mayor precisión. No obstante, puede afirmarse que el método de Runge-Kutta es superior, prácticamente siempre, a los métodos de orden 2.

Ejercicio 7. Escriba, utilizando ahora (RK), una función `runkut.m` que resuelva la ecuación diferencial por el método de Runge-Kutta descrito. Repita de nuevo el ejercicio 5. ¿Cómo interpreta los valores de los errores que este método da para este problema?

Ejercicio 8. Resuelva ahora el problema

$$y' = 4e^{0.8x} - 0.5y, x \in [0,4], \quad y(0) = 2$$

El script es, posiblemente, de poca utilidad porque sólo sirve para el problema planteado. En los siguientes ejercicios se proponen mejoras y ampliaciones interesantes.

Ejercicio 9. Utilice las sentencias de definir funciones para parametrizar el script anterior, de manera que sirva para cualquier problema, sin más que comunicar la expresión de $f(t,y)$ del segundo miembro de la ecuación diferencial. Resuelva los problemas

- 1) $y' = \operatorname{sh}t - y, y(1) = 5.6$ en $[1,3]$;
- 2) $y' = -2\operatorname{sen}(te^y), y(2) = 4.162$ en $[2,4]$.

4. Sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias

Los sistemas de ecuaciones diferenciales tienen un tratamiento parecido al de una ecuación. Recuerde que, como ya se ha dicho, un sistema de ecuaciones de orden 1 puede escribirse de forma vectorial y tiene el mismo aspecto que una ecuación. Así que programar los métodos anteriores para sistemas es muy fácil. Simplemente hay que realizar para cada función del sistema lo que se ha hecho hasta ahora con una única función. Utilizando Matlab, además, los cambios deben ser mínimos.

Ejercicio 10. Reestructure su programa para que sirva para sistemas. Utilice solamente el método de Runge-Kutta.

Ejercicio 11. Utilizando el método de Runge-Kutta resuelva el sistema en $[0,\pi]$

$$\begin{aligned}
 y_1' &= -7y_1 - 4y_4 \\
 y_2' &= -13y_1 - 2y_2 - y_3 - 8y_4 \\
 y_3' &= 6y_1 + y_2 + 4y_4 \\
 y_4' &= 15y_1 + y_2 + 9y_4
 \end{aligned}$$

con condición inicial

$$y_1(0) = 3, y_2(0) = -3, y_3(0) = 0, y_4(0) = -1$$

Ejercicio 12. El problema de segundo orden

$$LQ'' + RQ' + \frac{Q}{C} = E(t)$$

describe el comportamiento de la carga en un condensador de capacitancia C Faradios, que está instalado en serie con una resistencia de R Ohmios, una bobina de inductancia L Henrios y un voltaje impreso de $E(t)$ Voltios.

Considere el circuito en que $L = 3H$, $R = 50\Omega$, $C = 5 \cdot 10^{-6} F$ y el voltaje viene dado, en función de t (corriente alterna) , mediante $E(t) = 110 \sin 2\pi t$ volt.

Transforme la ecuación diferencial correspondiente a un sistema de dos incógnitas, Q y $dQ/dt = I$, donde I es la intensidad que recorre el circuito. Suponga que inicialmente un interruptor en serie en el circuito está abierto. Al cerrar el interruptor se inicia un proceso que es de tipo oscilatorio, con un momento inicial, digamos irregular, llamado transitorio, y una estabilización posterior llamada estado estacionario. Resuelva el problema y, a partir de los resultados, responda a las preguntas:

- 1) ¿Cuánto estima que dura el transitorio?
- 2) ¿Cuánto valen Q e I máximas y mínimas para el estado estacionario?
- 3) ¿Cuál es el período de oscilación en estado estacionario?
- 4) ¿En qué momentos se producen los máximos absolutos de Q e I ?
- 5) Esboce gráficas para $Q(t)$ e $I(t)$.

NOTA: Con un análisis previo, todas estas preguntas estarían perfectamente contestadas y tendríamos una idea exacta de la magnitud de duración del transitorio, así como de la magnitud y período del estado estacionario. Como en este caso se trata de un experimento numérico, deberá ir probando con distintos valores de b (extremo derecho del intervalo temporal) y distintos valores del paso h , hasta obtener un b y un h que le permita obtener una buena descripción del fenómeno en $[0, b]$. Por ejemplo, si el transitorio dura poco y se toma b muy grande, no podrá observar dicho transitorio. Por el contrario, si toma b muy pequeño, no alcanzará a ver el inicio del estado estacionario. Análogamente con h . Si toma h muy grande, el fenómeno estará mal descrito; por ejemplo, si coincidiera que toma h igual al período (el período de una corriente alterna puede ser muy pequeño), obtendrá el mismo valor en todos los puntos, lo que le dará una idea errónea de la solución. Pero si toma h muy pequeño, además de necesitar mucho tiempo de ejecución, se perderá durante un rato largo en un tramo simple de la onda, y tampoco obtendrá una idea buena de la solución.

Ejercicio 13. Si f no depende de y , el problema de valor inicial

$$y' = f(x), y(a) = y_0, x \in [a, b]$$

se resolvería mediante integración simple

$$y(x) = y_0 + \int_a^x f(t) dt$$

En tal caso, el método de Euler equivale a la regla de integración de un sólo punto (el inicial). ¿A qué reglas de integración equivalen en el sentido anterior los métodos de Heun, Euler modificado y Runge-Kutta?

5. Teoría cualitativa y estabilidad.

Un sistema de ecuaciones diferenciales como

$$x' = f(t, x, y)$$

$$y' = g(t, x, y)$$

donde $x' = dx/dt$ e $y' = dy/dt$, describe la trayectoria descrita por un móvil en el plano, o las poblaciones de dos especies que luchan por la supervivencia en un determinado hábitat, o el armamento de dos superpotencias con un área de influencia común, o la relación entre la intensidad que recorre un circuito simple y la carga del condensador; para cada tiempo t , $x(t)$ e $y(t)$ son las coordenadas del punto en que se encuentra el móvil, o la cantidad de individuos de cada especie, o el montante armamentístico de cada potencia, o el estado actual del circuito. Al plano en el que se dibujan esas trayectorias se lo llama **plano de fases**, y es de gran importancia en la teoría cualitativa y la estabilidad.

Cuando t no aparece en las expresiones de f y g , el sistema es

$$x' = f(x, y)$$

$$y' = g(x, y)$$

y se dice que es **autónomo**. Supondremos que $f(x, y)$ y $g(x, y)$ tienen derivadas parciales continuas en el plano.

Para sistemas lineales y de coeficientes constantes, por ejemplo,

$$x' = x - 2y$$

$$y' = 2x + y$$

existen métodos de solución totalmente efectivos. Pero para otros casos, en que no se pueden obtener soluciones explícitas, es posible obtener información acerca del comportamiento de las soluciones, en nuestro caso información acerca de las trayectorias, también llamadas **órbitas**, que el móvil puede describir, o de la evolución de las especies, o de la carrera armamentística de ambas naciones.

Los puntos en que $f(x, y) = 0$ y $g(x, y) = 0$ se llaman **puntos de equilibrio** o **puntos críticos**, pues si para (x_0, y_0) se tiene $f(x_0, y_0) = 0$ y $g(x_0, y_0) = 0$, es claro que $x = x_0$, $y = y_0$ es una solución del sistema que es constante y, por tanto, un 'lugar' de equilibrio para el móvil, las especies o la conflictividad entre las naciones. La determinación de los puntos críticos de un sistema y el comportamiento de las trayectorias proporciona información muy valiosa acerca de las soluciones del sistema. Los siguientes resultados pueden ser probados en el marco de la teoría cualitativa:

1. Por cada punto del plano pasa a lo sumo una trayectoria. Así, un punto de equilibrio es, por sí solo, una trayectoria y puede ser fuente y/o sumidero de trayectorias.
2. Una trayectoria que se inicia en un punto que no es de equilibrio, no puede alcanzar un punto de equilibrio en un tiempo finito. Así, si una trayectoria se aproxima a un punto crítico, necesariamente lo hace para $t \rightarrow \infty$.
3. Una órbita no puede cortarse a sí misma, a menos que sea una curva cerrada, en cuyo caso la órbita corresponde a una solución periódica del sistema.

Observemos que si para cada punto del plano se calcula $x' = f(x, y)$ e $y' = g(x, y)$ se obtiene la dirección que el móvil lleva en su paso por dicho punto. Si, además, se tienen en cuenta los signos de x' e y' es posible dibujar una flecha que indica el sentido del movimiento.

Utilice la primitiva **quiver** para realizar este trabajo para los sistemas siguientes:

- 1) $x' = 1$, $y' = y$, 2) $x' = y$, $y' = -x$, 3) $x' = x$, $y' = -y$, 4) $x' = -x$, $y' = -y$, 5) $x' = x - 2y$, $y' = 2x + y$,

$$6) \quad \begin{array}{l} x' = y \\ y' = -0.05(x^2 - 1)y - x \end{array} \quad 7) \quad \begin{array}{l} x' = y \\ y' = -0.1(x^2 - 1)y - x \end{array} \quad 8) \quad \begin{array}{l} x' = y \\ y' = -0.5(x^2 - 1)y - x \end{array}$$

Responda a las preguntas que se plantean. Para responderlas haga un esfuerzo imaginativo: considérese un ser abandonado en la pantalla de flechas que ve; imagine que no cesa de moverse, salvo en casos excepcionales que descubrirá, pero hágalo siguiendo siempre fielmente la dirección de la flecha correspondiente al punto del plano en que se halle. Por motivos de claridad solo se dibujan algunas flechas, pero no es difícil imaginar la dirección y sentido en puntos donde no está dibujada observando las flechas vecinas.

Ejercicio 3. Las siguientes preguntas hacen referencia, por orden, a los sistemas considerados:

1.0 ¿Cuáles son los puntos de equilibrio?

1.1 Si dos móviles parten de posiciones muy próximas, ¿permanecerán siempre próximos?

1.2 Si para t_0 está sobre el eje X, ¿permanecerá siempre en él? Si para t_0 está en el semiplano superior, ¿permanecerá siempre en él? Si para t_0 está en el semiplano inferior, ¿podrá cruzar el eje X? ¿Y tocarlo?

2.0 ¿Cuáles son los puntos de equilibrio?

2.1 Si para t_0 está en el origen ¿podrá dejarlo alguna vez? Y si está próximo al origen, ¿permanecerá próximo a él?

2.2 Si para t_0 está en un punto a distancia d del origen ¿puede saber a que distancia estará en un instante posterior? ¿Cuál será dicha distancia?

2.3 Si para t_0 está en un cierto punto ¿volverá a pasar por el mismo punto alguna vez? ¿Cuántas veces? ¿Qué soluciones del sistema son periódicas?

3.0 Determinar los puntos de equilibrio.

3.1 Si para t_0 se encuentra en un punto próximo al origen, ¿permanecerá siempre próximo al origen?

3.2 Si para t_0 se encuentra en un cierto cuadrante ¿podrá cambiar de cuadrante alguna vez? Si para t_0 se encuentra en el eje Y ¿cuál será su destino último? Si para t_0 se encuentra en el eje X ¿cuál será su destino final?

4.0 Diga los puntos de equilibrio.

4.1 Si dos móviles parten de posiciones ligeramente distintas, ¿continuarán siempre próximos?

4.2 Si un móvil está sobre un punto distinto del origen, ¿podrá alcanzar el punto simétrico respecto del origen? Realmente, ¿cuál será el destino común final?

5.0 Halle los puntos de equilibrio.

5.1 Si dos móviles parten de posiciones próximas ¿permanecerán siempre próximos?

5.2 Si para t_0 se encuentra a distancia d del origen, ¿volverá a estar otra vez a la misma distancia?

5.3 ¿Puede describir una trayectoria acotada?

Las ecuaciones 6), 7) y 8) son idénticas, salvo por un coeficiente. Se trata del sistema asociado a la ecuación $y'' + \alpha(y^2 - 1)y' + y = 0$ que Van der Pol obtuvo en 1920 cuando estudiaba los tubos de vacío. Se han puesto las tres ecuaciones de manera consecutiva para obtener un efecto de zoom y poder ver las órbitas asociadas ‘desde más o menos lejos’.

El enorme interés de las preguntas anteriores es evidente.

Las preguntas i.0 piden los puntos de equilibrio. En estos sencillos ejemplos los puntos críticos son fáciles de hallar. El interés de los puntos de equilibrio es grande; piénsese en la importancia de un equilibrio armamentístico, por ejemplo. Ahora bien, el equilibrio puede ser duradero (estable) o frágil (inestable).

Las preguntas i.1 tienen el denominador común de **la estabilidad**. Ya que la condición inicial es, con frecuencia un dato experimental, solo es conocido con cierta aproximación. Para algunos problemas un pequeño error en la condición inicial, o un pequeño desplazamiento de la posición de equilibrio, puede originar una solución, una situación, que difiere enormemente de la solución verdadera, o de la solución de equilibrio; en tal caso se habla de inestabilidad; en otros casos un pequeño error, un pequeño desplazamiento, sólo genera un error también pequeño en la solución, entonces se habla de estabilidad; la estabilidad se dice asintótica si el error de la solución hallada es cada vez más pequeño, es decir, si el error tiende a 0, o en otras palabras, si una ligera perturbación es fácilmente amortiguada.

Las preguntas i.2, pretenden obtener información sobre la ‘localización’ del móvil, sobre las posibles situaciones futuras, es decir, sobre si determinados valores pueden o no ser tomados por la solución.

Las preguntas que hacen referencia al ‘destino último’ del móvil pretenden saber sobre el comportamiento asintótico de las soluciones, es decir, sobre el comportamiento cuando t tiende a $+\infty$ o a $-\infty$.

Las preguntas i.3 apuntan a la posibilidad de que el móvil describa trayectorias que son cerradas y que corresponden a soluciones periódicas. La existencia de soluciones periódicas es una propiedad muy importante en determinados problemas. Aunque no es fácil distinguirlo, las ecuaciones de Van der Pol tienen una solución periódica representada mediante un círculo alrededor del origen. Esto se demuestra analíticamente mediante el Teorema de Lienard. Las trayectorias dentro del círculo son espirales que no salen de él; las de fuera del círculo se aprecian mejor con los campos de vectores de las ecuaciones 7) y 8); al acercarse al círculo son también espirales que lo estrechan más y más.

Con las ideas de los párrafos anteriores elabore el siguiente ejercicio.

Ejercicio 4.

a) En relación a los casos considerados

- 1) ¿En qué problemas detecta estabilidad asintótica? ¿Y estabilidad simple? ¿En cuáles hay comportamientos inestables?
- 2) Describa el comportamiento asintótico de los problemas anteriores.
- 3) ¿Qué problemas tienen soluciones periódicas?
- 4) ¿En alguno de los problemas hay trayectorias confinadas a un lugar acotado?

b) Considere los sistemas autónomos

$$\begin{aligned} x' &= x(4 - y - 4x) & x' &= 2x - 2y \\ y' &= y(7 - y - 1.5x) & y' &= -y + 2xy \end{aligned}$$

que relacionan las poblaciones de dos especies coexistentes en un mismo hábitat, en cada caso con un modelo distinto. Responda las preguntas

- 1) ¿Cuáles son sus puntos de equilibrio?
- 2) ¿Cuáles son estables e inestables?
- 3) ¿Cuáles tienen soluciones periódicas?
- 4) Describa la evolución de dichas especies a partir de diversas posiciones de partida. No olvide comentar los efectos de pequeñas perturbaciones respecto de los puntos de equilibrio.

Bibliografía

- J. H. Mathews, K. D. Fink: *Métodos Numéricos con Matlab.*, Prentice-Hall, 2000.
- D. Kincaid, W. Cheney: *Análisis Numérico. Las matemáticas del cálculo científico.* Addison-Wesley, 1994.