


Interpolación Polinómica



Interpolación Polinómica

- ◆ Un problema de interpolación
 - ☰ Interpolación lineal y cuadrática
- ◆ Forma normal del polinomio de interpolación.
- ◆ Forma de Lagrange.
- ◆ Forma de Newton.
 - ☰ Tabla de diferencias divididas
 - ☰ Evaluación y error del polinomio de interpolación
- ◆ Conclusiones y alternativas

Un problema de interpolación

◆ Evolución de la temperatura diurna

Hora	6	8	10	12	14	16	18	20
Grados	7	9	12	18	21	19	15	10

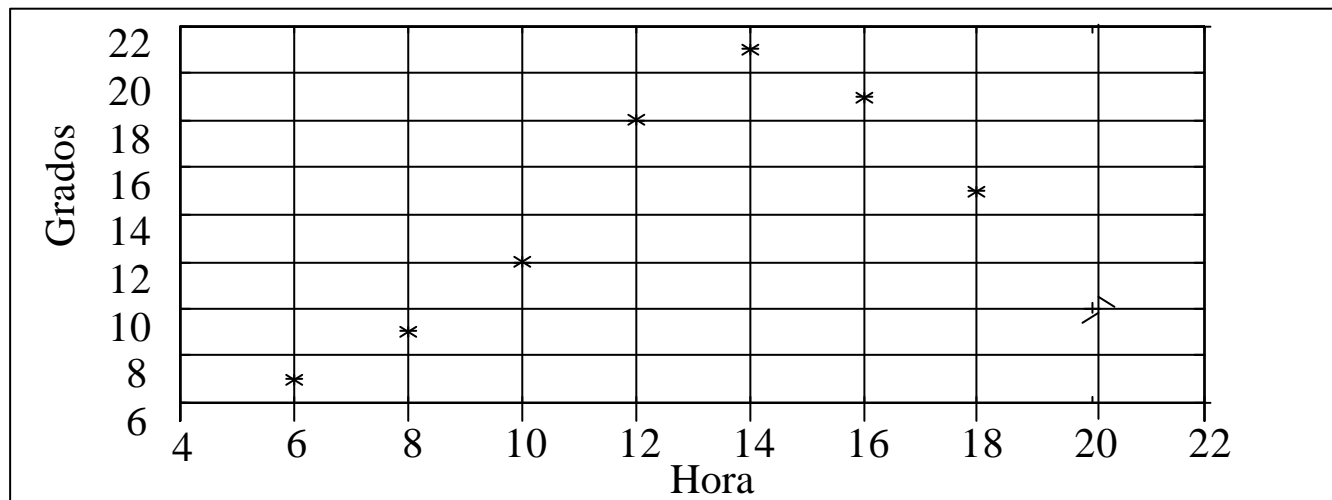


Gráfico de la temperatura en Matlab

```
% Hora
t = [6 8 10 12 14 16 18 20]'
% Temperatura
T = [7 9 12 18 21 19 15 10]'
plot(t,T,'*'), grid
xlabel('Horas'), ylabel('Grados')
```

Interpolación lineal

Recta que pasa por los puntos (x_0, y_0) y (x_1, y_1)

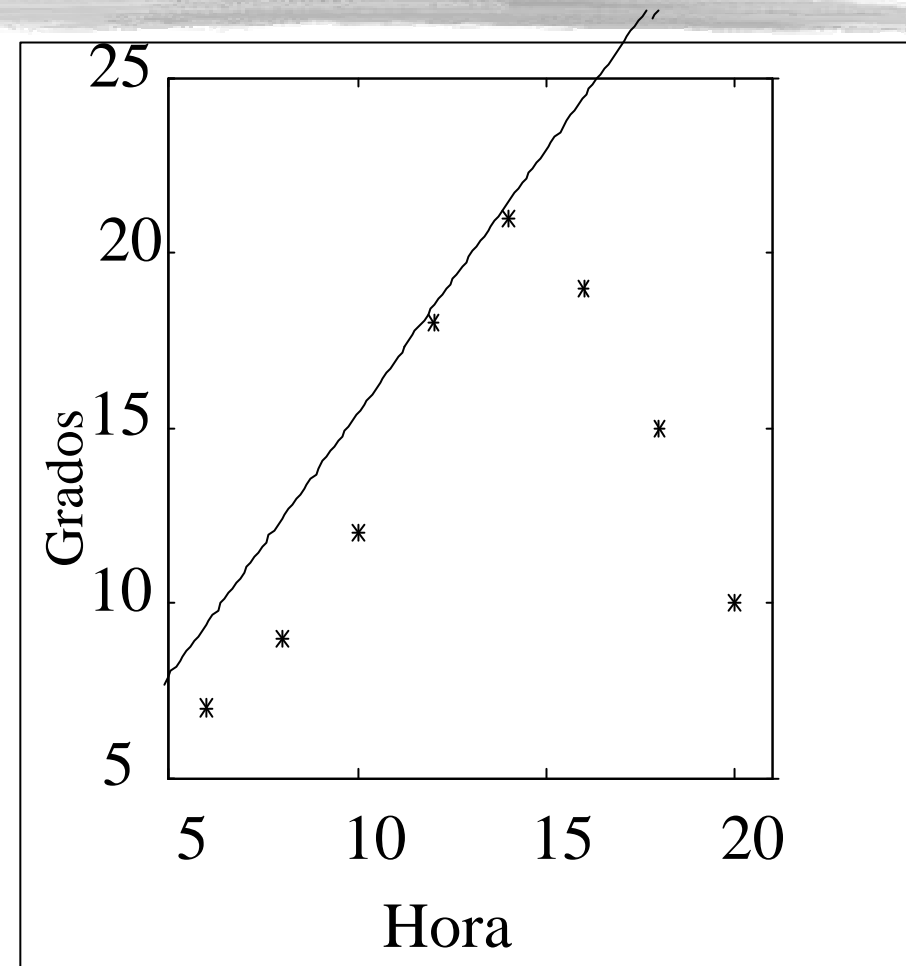
$$P_1(x) = a_0 + a_1x$$

$$a_0 + a_1x_0 = y_0$$

$$a_0 + a_1x_1 = y_1$$

$$a_0 + 12a_1 = 18$$

$$a_0 + 14a_1 = 21$$



Interpolación cuadrática

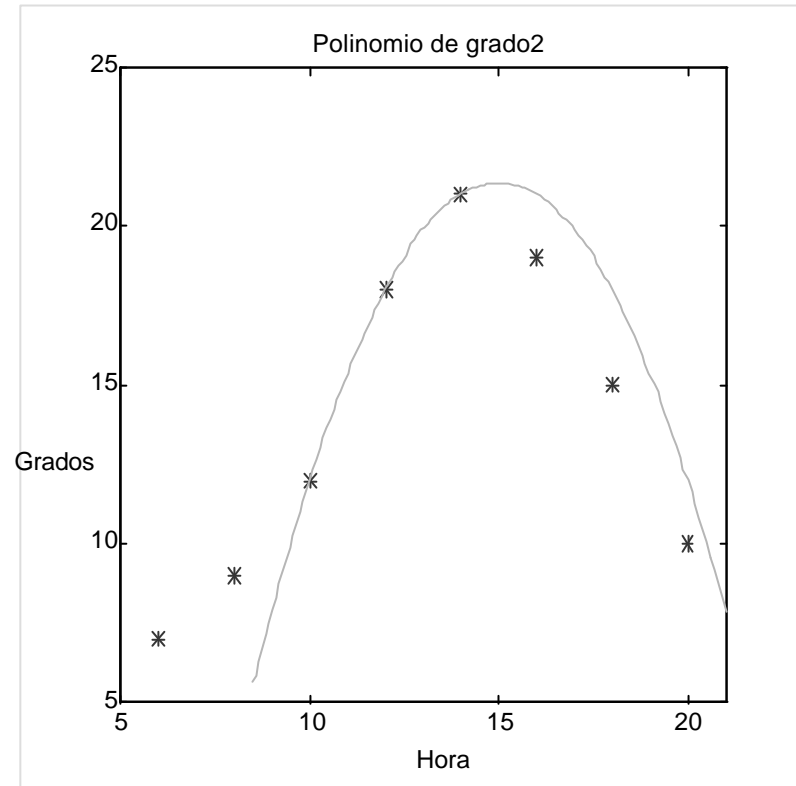
$$P_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$$

$$a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 = y_0$$

$$a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 = y_1$$

$$a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 = y_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 10 & 100 \\ 1 & 12 & 144 \\ 1 & 14 & 196 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 18 \\ 21 \end{pmatrix}$$



```
X=10:2:14
Y=[12 18 21]
A=vander(X)
cond(A)
p=A\Y
```

```
polyval(p,X)
x=5:0.1:22;
y=polyval(p,x);
plot(x,y)
```

Desplazamiento del origen

$$P_2(x) = b_0 + b_1(x - x_1) + b_2(x - x_1)^2$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$P_2(x) = 18 + 9/4(x-12) - 3/8(x-12)^2$$

$$A = [4 \ -2; 4 \ 2]; \quad c = [-6, 3]';$$

$$\gg \text{cond}(A)$$

$$\gg p = (A \setminus c)$$

$$\gg p = [p' \ 18]; \quad \text{polyval}(p, X-12)$$

Forma normal del polinomio de interpolación

$$\blacklozenge P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$$

$$\blacklozenge \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^{n-1} \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

- ◆ Dados $n+1$ puntos de abscisas distintas $(x_0, y_0), \dots, (x_n, y_n)$, existe un único polinomio de grado no superior a n tal que

$$P(x_i) = y_i, \quad i=1,2,\dots,n$$

Forma de Lagrange del polinomio de interpolación

◆ Polinomios de Lagrange

$$L_{in}(x) = \frac{(x - x_0) \cdots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \cdots (x - x_n)}{(x_i - x_0) \cdots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \cdots (x_i - x_n)}$$

◆ Existencia del polinomio de interpolación.

$$P_n(x) = y_0 L_{0n}(x) + y_1 L_{1n}(x) + y_2 L_{2n}(x) + \cdots + y_n L_{nn}(x)$$

Forma de Newton del polinomio de interpolación

$$P_n(x) = c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)(x-x_1) + \cdots + \cdots + c_n(x-x_0)(x-x_1) \cdots (x-x_{n-1})$$

◆ Determinación algebraica

$$P_n(x_0) = y_0 = c_0$$

$$P_n(x_1) = y_1 = c_0 + c_1(x_1 - x_0)$$

$$P_n(x_2) = y_2 = c_0 + c_1(x_2 - x_0) + c_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)$$

◆ Ventajas

- ◆ El sistema es triangular

- ◆ Permite añadir nuevos puntos sin rehacer todos los cálculos.

Tabla de diferencias divididas

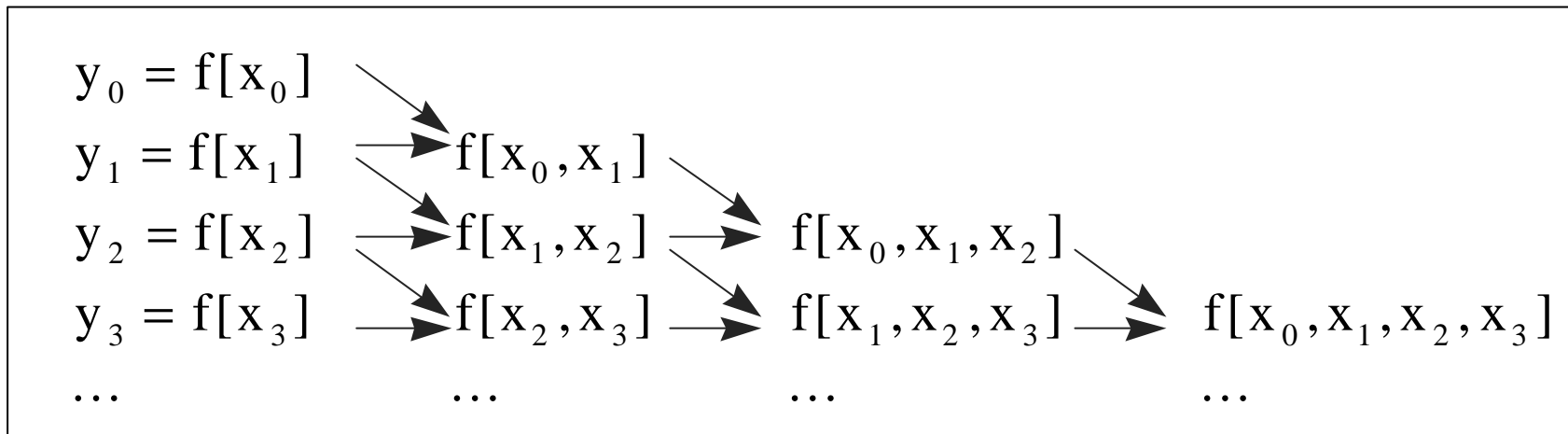
$$c_0 = f[x_0] = y_0$$

$$c_1 = f[x_0, x_1] = \frac{y_1 - c_0}{x_1 - x_0} = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0}$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}$$

$$f[x_0, x_1, \dots, x_k] = \frac{f[x_1, x_2, \dots, x_k] - f[x_0, x_1, \dots, x_{k-1}]}{x_k - x_0}$$

Tabla de diferencias divididas



12	18				
14	21	\rightarrow	1.5000	\rightarrow	
10	12	\rightarrow	2.2500	\rightarrow	-0.3750
16	19	\rightarrow	1.1667	\rightarrow	-0.5417
				\rightarrow	-0.0417

Evaluación del polinomio de interpolación

$$\begin{aligned}
 P_n(x) &= c_0 + \\
 & c_1(x-x_0) + \\
 & c_2(x-x_0)(x-x_1) + \\
 & \quad + \dots \\
 & + c_n(x-x_0)(x-x_1) \dots (x-x_{n-1}) = \\
 & \quad = (\dots((c_n \cdot (x-x_{n-1}) \\
 & \quad + c_{n-1}) \cdot (x-x_{n-2}) \\
 & \quad + c_{n-2}) \cdot (x-x_{n-3}) \\
 & \quad \quad + \dots \\
 & \quad + c_1) \cdot (x-x_0) \\
 & \quad \quad + c_0
 \end{aligned}$$

Error de interpolación

$$f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)$$

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1}] = \frac{f^{(n+1)}(\eta)}{(n+1)!}$$

Conclusiones

- ◆ El polinomio de interpolación suele usarse para estimar valores de una función tabulada, en las abscisas que no aparecen en la tabla.
- ◆ El aumento de grado no siempre mejora la aproximación.
- ◆ El polinomio es muy sensible a los errores de los datos.

Alternativas

 Método de Mínimos Cuadrados

 Interpolación polinómica segmentaria. Splines