

# Métodos Iterativos para la ecuación $f(x)=0$

- **Estimación inicial**

$x_0$  tal que  $f(x_0) \cong 0$

- **Proceso iterativo**

$x_1, x_2, \dots, x_k, \rightarrow x_* : f(x_*)=0$

- **Criterio de parada**

$|f(x_k)| < \text{tol}$  ó

$d_k = |x_{k+1} - x_k| < \text{tol}$

## Tipos de convergencia

- **Error del paso k**

$$e_k = |x_k - x_*| \cong |x_k - x_{k-1}|$$

- **Convergencia lineal**

$$e_{k+1} / e_k \quad \text{cte}$$

- **Convergencia cuadrática**

$$e_{k+1} / e_k^2 \quad \text{cte}$$

# Método de Bisección

- ★ Determinar un intervalo  $[a,b]$  tal que  $f(a)$  tiene signo distinto de  $f(b)$  y  $f$  continua en  $[a,b]$ .
- 🕒 Hallar el punto medio  $c$  del intervalo.
- 🕒 Elegir, entre  $[a,c]$  y  $[c,b]$ , un intervalo en el que la función cambie de signo.
- 🕒 Repetir los pasos 2 y 3 hasta conseguir un intervalo con la precisión deseada ( $f(c) < \text{tol}$ )

(Clave: Teorema de Bolzano)

# Teorema de Bolzano

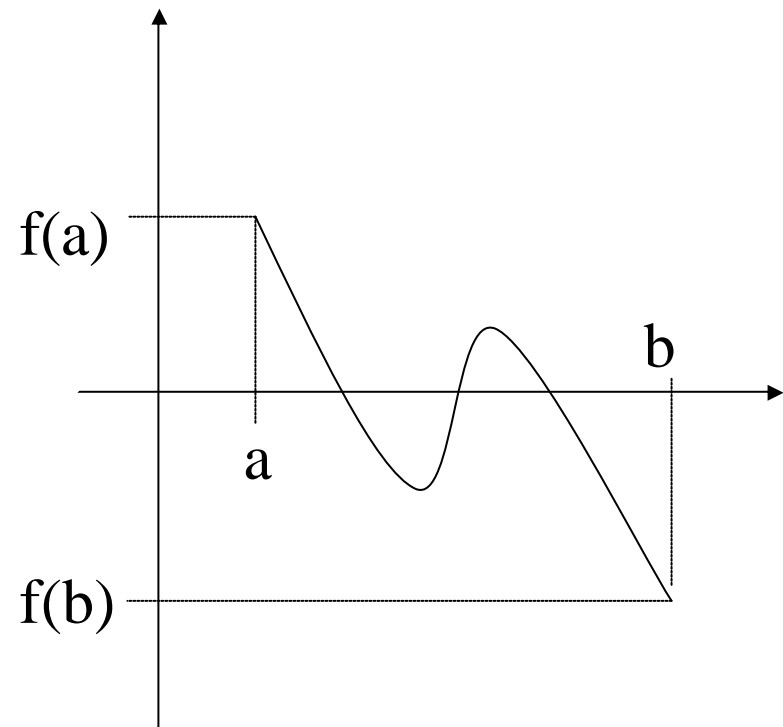
Sea  $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continua

y sean  $a, b \in A$

con  $f(a)f(b) < 0$ .

Entonces, existe

$c \in [a, b]$  con  $f(c) = 0$ .



# Algoritmo de Bisección

```
c = (a+b)/2;  
if f(a)*f(c) <= 0      %elige [a,c]  
    b=c;  
end  
if f(c)*f(b) <= 0      %elige [c,b]  
    a=c;  
end
```

**Teorema:** El método de la bisección genera una sucesión  $\{x_n\}$  que converge a una raíz  $\xi$  de  $f$  con

$$|x_n - \xi| \leq (b-a)/2^n.$$

# Método de *Regula-Falsi*

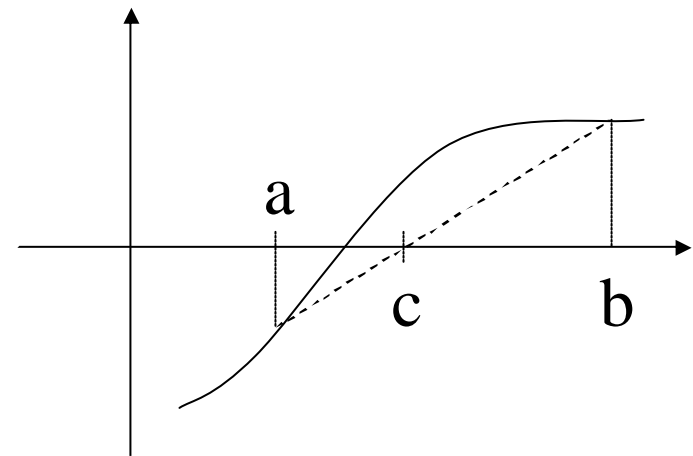
☆ Determinar un intervalo  $[a,b]$  tal que  $f(a)$  tiene signo distinto de  $f(b)$ .

🕒 Hallar el punto  $c$  que divide el intervalo  $[a,b]$  en partes proporcionales a  $f(a)$  y  $f(b)$ . Sea

$$c = a - f(a) \frac{b - a}{f(b) - f(a)}$$

🕒 Elegir, entre  $[a,c]$  y  $[c,b]$ , un intervalo en el que la función cambie de signo.

🕒 Repetir los pasos 2 y 3 hasta conseguir la precisión deseada.



# Bisección

- ☹ Convergencia lineal de razón  $1/2$ .
- ☺ Cota de la raíz:  $(b-a)/2^n$ .
- ☹ La aproximación obtenida puede ser peor que la del paso anterior.

# Regula Falsi

- ☺ Más rápido al principio.
- ☹ Convergencia lineal.
- ☹ Error estimado por:  
 $|x_n - x_{n-1}|$
- ☹ Se aproxima a la raíz por un lado.

# Método del Punto Fijo

- ☆ Transformar la ecuación  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$  en una ecuación equivalente de punto fijo:  $\mathbf{x} = \mathbf{g}(\mathbf{x})$ .
- 🕒 Tomar una estimación inicial  $\mathbf{x}_0$  del punto fijo  $\mathbf{x}_*$  de  $\mathbf{g}$  [ $\mathbf{x}_*$  punto fijo de  $\mathbf{g}$  si  $\mathbf{g}(\mathbf{x}_*) = \mathbf{x}_*$ ].
- 🕒 Para  $\mathbf{k}=1, 2, 3, \dots$  hasta que converja, iterar  $\mathbf{x}_{\mathbf{n}+1} = \mathbf{g}(\mathbf{x}_{\mathbf{n}})$ .

**Teorema del punto fijo**: Sea  $g:[a,b] \rightarrow [a,b]$  continua, entonces:

- a)  $g$  posee al menos un punto fijo.
- b) Si además  $|g'(x)| \leq k < 1, \forall x \in [a,b]$ , entonces el punto fijo es único y si tomamos  $x_0 \in [a,b]$ , la sucesión  $x_{\mathbf{n}+1} = g(x_{\mathbf{n}})$  converge al punto fijo de  $g(x)$ .

# Convergencia del Método del Punto Fijo

Aplicar el método del punto fijo a:

$$\Downarrow g(x) = \cos x, x_0$$

$$\Downarrow g(x) = 2/x^2, x_0=1$$

$$\Downarrow g(x) = \sqrt{2/x}, x_0=1$$

y analizar los resultados.

Sugerencia: Usar la orden

`ITERATES(g(x), x, x_0, n)`

de `DERIVE` y comparar los dos últimos con  $2^{(1/3)}$ .

Tomando  $x_0$  cercano al punto fijo  $x_*$

⌘ si  $|g'(x_*)| < 1$  los iterados convergen linealmente a  $x_*$ .

⌘ si  $|g'(x_*)| > 1$  los iterados no convergen a  $x_*$ .

⌘ si  $g'(x_*) = 0$  los iterados convergen cuadráticamente a  $x_*$ .

# Algoritmo de Punto Fijo

## ⌘ Datos

- ⊞ Estimación inicial:  $\mathbf{x}_0$
- ⊞ Precisión deseada: **tol**
- ⊞ Tope de iteraciones: **maxiter**

## ⌘ Proceso: mientras no converja repetir

- ⊞ Nueva estimación:  $\mathbf{x} = \mathbf{g}(\mathbf{x}_0)$
- ⊞ Incremento: **incr** =  $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|$
- ⊞ Actualización:  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}$

## ⌘ Resultado

- ⊞ Estimación final:  $\mathbf{x}$

# Método de Newton

- Ecuación de la tangente

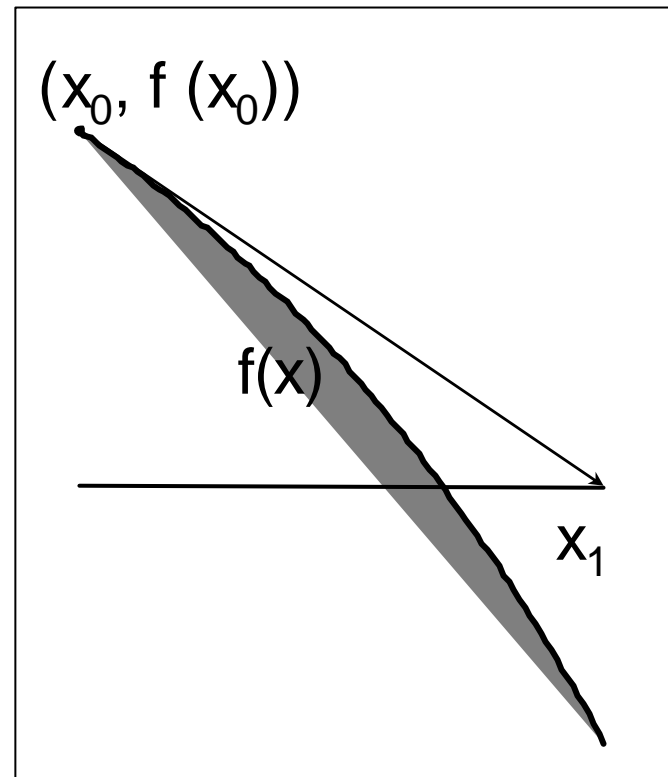
$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

- Intersección con OX

$$x_1 = x_0 - f(x_0)/f'(x_0)$$

- Paso genérico

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n)$$



# Convergencia del método de Newton

- Newton como iteración de punto fijo

$$g(x) = x - f(x)/f'(x)$$

- Derivada de la función de iteración

$$g'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}$$

- Convergencia cuadrática

$$g'(x_*) = 0 \quad \text{si} \quad f'(x_*) \neq 0$$

☺ Ventaja: converge cuadráticamente si

- la estimación inicial es buena
- no se anula la derivada

☹ Inconveniente: usa la derivada

- coste de la evaluación
- disponibilidad

# Algoritmo de Newton

## ⌘ Datos

- Estimación inicial:  $\mathbf{x}$
- Precisión deseada:  $\mathbf{tol}$
- Tope de iteraciones:  $\mathbf{maxiter}$

## ⌘ Proceso: mientras no converja repetir

- Incremento:  $\mathbf{incr} = - f(\mathbf{x})/f'(\mathbf{x})$
- Nueva estimación:  $\mathbf{x} = \mathbf{x} + \mathbf{incr}$

## ⌘ Resultado

- Estimación final:  $\mathbf{x}$

# Método de la secante

- Ecuación de la secante

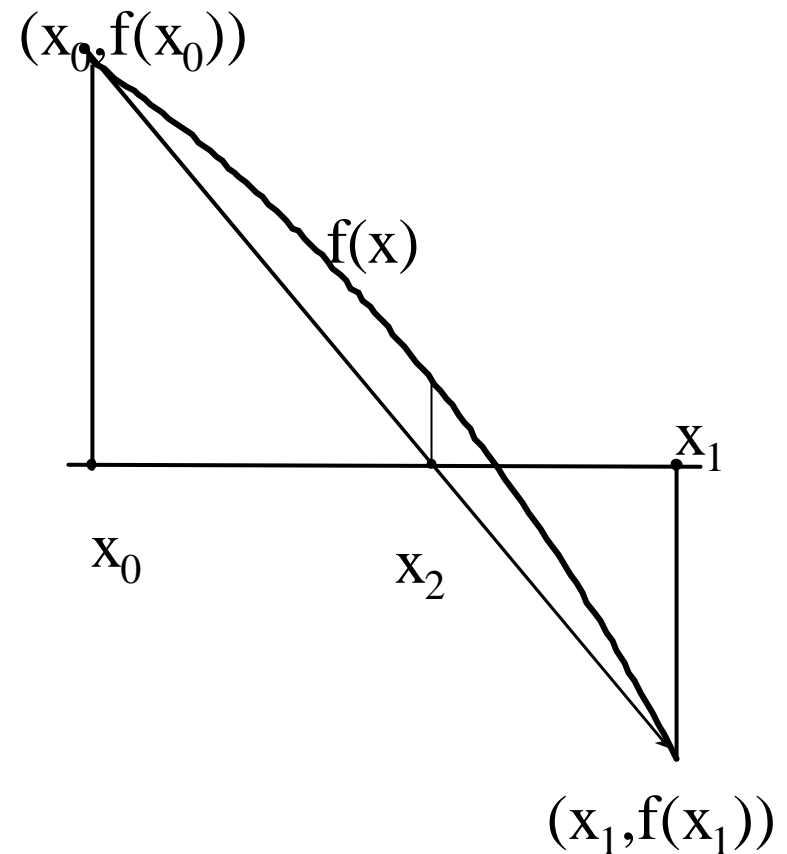
$$y - f(x_0) = m(x - x_0)$$

- Intersección con OX

$$x_2 = x_0 - f(x_0)/m$$

- Pendiente

$$m = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$



# Algoritmo de la secante

- Datos:  $x_0, x_1, y_0$
- Calcular:  $y_1 = f(x_1)$
- Calcular:  $\mathbf{incr} = -y_1(x_1 - x_0)/(y_1 - y_0)$
- Nueva estimación:  $x_2 = x_1 + \mathbf{incr}$
- Actualizar para el paso siguiente:

$$x_0 = x_1; y_0 = y_1; x_1 = x_2$$

# Newton versus Secante

---

- El método de **Newton**, cuando converge, lo hace cuadráticamente, a costa de evaluar la derivada en cada paso.
- Sin usar la derivada, el método de la **secante** proporciona convergencia superlineal.
- Las **ecuaciones polinómicas** pueden resolverse por el método de Newton, puesto que la derivada se obtiene fácilmente.