Universidad
Antonio de Nebrija

DII

Asignatura:	*MA4119 Métodos Matemáticos*				
Cuatrimestre:	**1º /**	Examen:	**Final**	Convocatoria:	**Ordinaria**
Grupo:	**4INT1**	Curso:	**2006/2007**	Fecha: **19/1/2007**	
Alumno:					

TODAS LAS RESPUESTAS TIENEN QUE ESTAR DEBIDAMENTE EXPLICADAS Y JUSTIFICADAS. PUEDEN HACERSE LOS CÁLCULOS CON REDONDEO A CUATRO CIFRAS DECIMALES.

1.- (2 puntos) Dada la función $f(x)=\sqrt[3]{x}$ definida en el intervalo $(1,2)$ se pide:

a) (0.5 puntos) Dada la función $f(x)=\sqrt[3]{x}$ definida en el intervalo $(1,2)$ se pide determinar el polinomio de interpolación en los puntos $x_0=1$, $x_1=1{,}5$ y $x_2=2$ de $f(x)$. Si añadimos el punto $x_3=2{,}5$ calcular el correspondiente polinomio de interpolación en función del anterior.

b) (1.5 puntos) Consideremos ahora la función $F(x)=\int_1^x \log\left(\sqrt[3]{t}\right)dt$ definida para valores x en $(1,2)$. Estimar el número de puntos igualmente espaciados necesarios que hay que tomar en dicho intervalo para que el polinomio de interpolación sea una aproximación a $F(x)$ con un error de 10^{-3}.

2.- (2 puntos) Se quiere construir un techo ondulado comprimiendo una lámina de aluminio plana. Para ello tomamos la función $f(x)=5\,sen(x/3)$ que describe el perfil de las ondas. Si tenemos que medir la lámina de aluminio necesaria para un metro de tejado ondulado debemos calcular la longitud de arco de curva definida por $f(x)$ entre 0 y 100 cm, esto es,

$$\int_0^{100}\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx=\int_0^{100}\sqrt{1+\frac{25}{9}\cos^2\left(\frac{x}{3}\right)}$$

a) (0.5 puntos) Calcular su valor aproximado utilizando *la Regla del Trapecio Simple*.

b) (1.5 puntos) Estimar el número de puntos que hay que tomar en el intervalo [0,100] para que, calculando *por la Regla del Trapecio Compuesta* dicha integral el error sea inferior a 1 cm.

Universidad
Antonio de Nebrija

3.- (2 puntos) a) Si disponemos de N puntos $(t_1, y_1), \ldots, (t_N, y_N)$. ¿Cuál es el coeficiente k del ajuste de una curva del tipo $y = \cos t + k\sqrt{t}$ a los N puntos anteriores en el sentido de los mínimos? Obtener una aproximación de y(0) ajustando los datos de la tabla:

t_k	1	2	3
y_k	180	238	312

b) Dar un ejemplo de un polinomio cuya *Sucesión de Sturm* acabe con un polinomio *no constante*. ¿Qué significado tiene esto?

4.- Se considera la ecuación $f(x) = \cos^2 x - x^3 + (1/4)e^{\sqrt{x}} = 0$

a) (0.5 puntos) Encontrar un intervalo [a,b] que contenga a una raíz de esta ecuación.

b) (1 punto) Determinar una función $g(x)$ definida en el intervalo anterior que permita aplicar el Método del punto Fijo para aproximar dicha raíz para cualquier condición inicial.

c) (0.5 puntos) Estimar el número de iteraciones necesarias que hay que realizar para que la iteración de punto fijo, fijada cualquier condición inicial en el intervalo [a,b], nos de una aproximación al cero de f en [a,b] con un error menor que 10^{-5}

5.- Se considera el siguiente programa:

```
function [t,y]=metodo(a,b,y0,f,n)   (1)
h=(b-a)/n;                          (2)
t=---a:h:b                          (3)
y=zeros(size(t));                   (4)
y(1)=y0;                            (5)
for k=1:-n;                         (6)
   k1=f(t(k),y(k));                 (7)
   ykp= f(x)+  h*k1;  ykp           (8)
   k2=f(t(k+1),---);                (9)
   y(k+1)=y(k)+h/2*--;             (10)
                 (k1+k2)
end
```

a) (1 punto) Completa los huecos ---- y comenta cada línea del programa, usando como referencia el número que aparece, explicando qué es lo que ejecuta MATLAB y qué es lo que matemáticamente se calcula. ¿De qué método se trata?

b) En el estudio de la difracción de la luz aparece la integral de Fresnel $y(t) = \int_0^t \cos(s^2)\,ds$

b.1) (0.5 puntos) Dar la ecuación diferencial $y'(x) = f(t,x)$ $y(0) = y_0$ que tiene a $y(t)$ por solución

b.2) (0.5 puntos) ¿Qué valores de a, b, y_0, f, n habría que dar como entradas a nuestro programa de Matlab para obtener por el método anterior una tabla de la solución de la ecuación diferencial anterior en 4 puntos? Calcular la tabla.

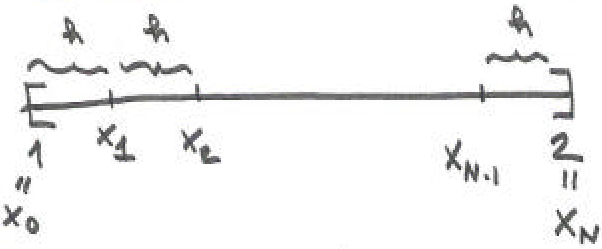
1:

a) Cálculo de la TABLA de diferencias divididas:

x_k	$f[x_k]$	$f[x_k,x_{k+1}]$	$f[x_k,x_{k+1},x_{k+2}]$	$f[x_k,x_{k+1},x_{k+2},x_{k+3}]$
1	1			
		0,2894		
1,5	1,1447		−0,059	
		0,2304		0,0155
2	1,2599		−0,0358	
		0,1946		
2,5	1,3572			

$$\boxed{\begin{aligned} P_2(x) &= 1 + 0{,}2894(x-1) - 0{,}059(x-1)(x-1{,}5) \\ P_3(x) &= P_2(x) + 0{,}155\,(x-1)(x-1{,}5)(x-2)\,. \end{aligned}}$$

b)



$x_k = x_0 + k\cdot h$; $h = \frac{1}{N}$; $k = 0, 1, \dots, N$

Por el Teorema de LAGRANGE:

$$|F(x) - \underbrace{P_N(x)}| = \left| \frac{F^{N+1}(\theta)}{(N+1)!}(x-x_0)\cdots(x-x_N) \right| \quad (*)$$

polinomio interpolador en $(x_0,y_0),\dots,(x_N,y_N)$

Hoja nº

$$F^{1)}(x) = \frac{1}{3}\log x$$

$$F^{2)}(x) = \frac{1}{3}\,\frac{1}{x}$$

$$F^{3)}(x) = \frac{1}{3}\cdot\frac{(-1)}{x^2}$$

$$F^{4)}(x) = \frac{1}{3}\cdot\frac{2\cancel{*}}{x^{\cancel{4}3}}$$

$$\vdots$$

$$\Rightarrow \quad F^{N)}(x) = \begin{cases} \text{si } N=1; & \frac{1}{3}\log x \\ \text{si } N>1; & \frac{(-1)^N}{3}\cdot\frac{(N-2)!}{x^{N-1}} \end{cases}$$

$$(*) = \left| \frac{(-1)^{N+1}}{3}\,\frac{\cancel{(N-1)!}}{\theta^N (N+1) N\cancel{!}}\,\frac{1}{}\cdot(x-x_0)\cdots(x-x_N) \right| <$$

$$\theta \in (1,2) \Rightarrow 1 < \theta^N < 2^N \Rightarrow 1/\theta^N < 1$$

$$x \in (1,2)$$

$$< \frac{1}{3!}\,\frac{|(x-x_0)\cdots(x-x_N)|}{N\cdot(N+1)} \leq \frac{1}{3!\,N} < 10^{-3}$$

$|x-x_k| \leq 1$ para $k=0,1,\dots,N$

porque $x, x_k \in [1,2]$

$$\boxed{\text{Para } N \geq 1000 \Rightarrow \frac{1}{3!\,N} < 10^{-3}}$$

2.-

a) $$\int_0^{100} \sqrt{1+\frac{25}{9}\cos^2\left(\frac{x}{3}\right)} \sim$$

$$\frac{100}{2}\left(1,9436+1,1492\right) \sim 154,64.$$

b) $$\text{ERROR} = \left|\frac{h^2(b-a)}{12}\, f^{2)}(\theta)\right| \quad (*)$$

$$\theta \in (0,100)$$

$$f(x) = \left(1+\frac{25}{9}\cos^2\left(\frac{x}{3}\right)\right)^{\frac{1}{2}\,'} = -\frac{1}{2}\left(1+\frac{25}{9}\cos^2\left(\frac{x}{3}\right)\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot$$

$$\cdot\frac{25}{9}\, 2\, \frac{1}{3}\cos\left(\frac{x}{3}\right)\cdot \text{sen}\left(\frac{x}{3}\right) = -\frac{25}{27}\cdot \text{sen}\left(\frac{2x}{3}\right)\cdot$$

$$\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\left[1+\frac{25}{9}\cos^2\left(\frac{x}{3}\right)\right]^{\frac{1}{2}}} \qquad \cos\left(\frac{2x}{3}\right)$$

$$\boxed{2\cdot \text{sen}x\cdot\cos x = \text{sen}\,2x}$$

$$f^{2)}(x) = -\frac{25}{54}\cdot\left[\frac{2}{3}\cdot\cos\left(\frac{2x}{3}\right)\cdot\frac{1}{\left[1+\frac{25}{9}\cos^2\left(\frac{x}{3}\right)\right]^{\frac{1}{2}}} +\right.$$

$$+\operatorname{sen}\left(\frac{2x}{3}\right)\cdot\left(+\frac{1}{2}\left(1+\frac{25}{9}\cos^2\left(\frac{x}{3}\right)\right)^{-\frac{3}{2}}\cdot\frac{25}{27}\cdot\underbrace{2\cos\left(\frac{x}{3}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{x}{3}\right)}_{=\operatorname{sen}\left(\frac{2x}{3}\right)}\right)\right]$$

$$=-\frac{25}{24}\left[\frac{2}{3}\cos\left(\frac{2x}{3}\right)\cdot\boxed{\frac{1}{\left(1+\frac{25}{9}\cos^2\left(\frac{x}{3}\right)\right)^{\frac{1}{2}}}}+\right.$$

$1 \geq \;\; \geq 0$

$$\left.+\frac{25}{54}\cdot\operatorname{sen}^2\left(\frac{2x}{3}\right)\cdot\boxed{\left(1+\frac{25}{9}\cos^2\left(\frac{x}{3}\right)\right)^{-\frac{3}{2}}}\right]$$

$1 \geq \;\; \geq 0$

$$\left|f^{2)}(\theta)\right|<\frac{25}{54}\cdot\left[\frac{2}{3}+\frac{25}{54}\right]<0,55$$

Luego,

$$(*)\ \triangleright<\frac{h^2\,150}{12}\times 0,55<4,6\times h^2<1$$

$$h=\frac{150}{N}\qquad\boxed{\text{para}\quad N>250}$$

Universidad Antonio de Nebrija

Hoja nº

3.- a) N puntos $(t_1, y_1), \ldots, (t_N, y_N)$

Ecuación de mínimos:

$$f(K) = \sum_{k=1}^{N} \left(y_k - (\cos t_k + K\sqrt{t_k})\right)^2$$

Condición $f'(K) = 0$:

$$\sum_{k=1}^{N} 2\left(y_k - (\cos t_k + K\sqrt{t_k})\right)(-\sqrt{t_k}) = 0 \iff$$

$$\sum_{k=1}^{N} \left[(y_k - \cos t_k)(-\sqrt{t_k}) + K(-t_k)\right] = 0 \iff$$

$$\boxed{K = \frac{\sum_{k=1}^{N} (\cos t_k - y_k)\sqrt{t_k}}{\sum_{k=1}^{N} t_k}}$$

N=3, la fórmula en los valores de la tabla es igual a:

$$K = \frac{(\cos 1 - 180) + (\cos 2 - 238)\sqrt{2} + (\cos 3 - 312)\sqrt{3}}{6} =$$

$= -176,4576$. Luego, $y(t) = \cos t + (-176,4576)\sqrt{t}$

es el ajuste, e $\boxed{y(0) = 1.}$

¡NO DEPENDE DEL K!

Universidad Antonio de Nebrija

(3.-) b) Ejemplo: $\boxed{P=(x-1)^2=x^2+1-2x}$ Hoja nº

Calculamos su sucesión de Sturm:

$P_0 = P$

$P' = 2x-2 \sim P_1 = x-1$

Fijaos que aquí se acaba la sucesión.

Si uno calcula

$$\begin{array}{l|l} P_0 & P_1 \\ \hline 0 & x-1 \end{array}$$

//

Significado: Si el último término de la sucesión de Sturm no es constante, significa que P tiene raíces reales que tienen multiplicidad > 1 (NO SIMPLES).

4.-

Hoja nº____

a) $f(\pi/4) = 0,6220$
$f(\pi/3) = -0,2028$] ↙ T. BOLZANO

Existe al menos una raíz de f en $[\pi/4, \pi/3]$.

b)

$$g(x) = \left(\cos^2 x + \frac{1}{4} e^{\sqrt{x}}\right)^{\frac{1}{3}}$$

Verificamos las dos condiciones del T. Punto fijo en $[\pi/4, \pi/3]$:

$\boxed{1)}$: $\pi/4 < g(\pi/4) = 1,0343 < \pi/3$

$\pi/4 < g(\pi/3) = 0,9815 < \pi/3$

0,7854 1,0472

$$g'(x) = \frac{1}{3} \underbrace{\left(\cos^2 x + \frac{1}{4} e^{\sqrt{x}}\right)^{-2/3}}_{>0} \Big(\underbrace{-2\cos x \,\mathrm{sen}\, x}_{= -\mathrm{sen} 2x} + \frac{1}{4}\frac{1}{2} x^{-1/2} e^{\sqrt{x}}$$

Estudiamos el signo de la derivada:

Como : $0.3397 \leq \frac{1}{8} x^{-1/2} e^{\sqrt{x}} \leq 0.3422$, y

$0.8660 \leq \mathrm{sen} 2x \leq 1$

Universidad Antonio de Nebrija

Tenemos entonces que $g'(x) < 0$ cuando $x \in [\pi/4, \pi/3]$.

Por tanto, $\pi/4 \leq g(x) \leq \pi/3$ siempre que $\pi/4 \leq x \leq \pi/3$.

$\boxed{2)}$ $$|g'(x)| = \frac{1}{3}\left(\cos^2 x + \frac{1}{4}e^{\sqrt{x}}\right)^{-2/3} \Big| \underbrace{-2\cos x \,\text{sen}\, x}_{-\text{sen}\, 2x} + \frac{1}{4}\frac{1}{2}x^{-1/2}e^{\sqrt{x}} \Big| \leq$$

$$\leq \frac{1}{3}\left(\cos^2 x + \frac{1}{4}e^{\sqrt{x}}\right)^{-2/3}\left(|\text{sen}\, 2x| + \frac{1}{8}x^{-1/2}e^{\sqrt{x}}\right)$$

$$\leq \frac{1}{3} \times \frac{1}{0{,}9877} \times^{①} \left(1 + \frac{1}{8} \times 0.3922\right)^{②} = 0.3519 = K < 1$$

① $\cos^2 x + \frac{1}{4}e^{\sqrt{x}}$ es DECRECIENTE en $[\pi/4, \pi/3]$ y positiva $\Rightarrow$

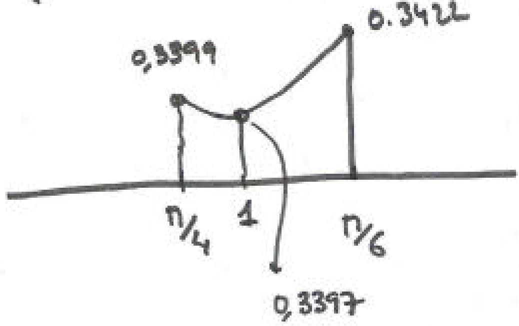
$$\left(\cos^2 x + \frac{1}{4}e^{\sqrt{x}}\right) \leq \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}e^{\sqrt{\pi/4}} \simeq 1.0343$$

$$\underset{\overset{\wr\wr}{0.9815}}{(0.5)^2 + \frac{1}{4}e^{\sqrt{\pi/3}}} \Rightarrow \underset{0{,}9633}{\uparrow} \leq \left(\cos^2 x + \frac{1}{4}e^{\sqrt{x}}\right)^2 \leq 1{,}0698 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0{,}9877 \leq \left(\cos^2 x + \frac{1}{4}e^{\sqrt{x}}\right)^{2/3} \leq 1{,}0227$$

② $|\operatorname{sen} 2x| \leq 1$, y

$0.3397 \leq \frac{1}{p} x^{-1/2} e^{\sqrt{x}} \leq 0.3422$



c)

$$|\xi_n - \xi| \leq \frac{(0.3519)^n}{1-0.3519} \cdot |\pi/3 - \pi/4| =$$

$$= \frac{(0.3519)^n}{0.6481} \cdot 0{,}2618$$

$\boxed{n > 10}$

5.-

a) Apuntes de CLASE

Hoja nº

b)

b.1)
$$\begin{cases} \dot{y}(t) = \cos t^2 \\ y(0) = 0 = y_0 \end{cases}$$

b.2)
$a = t_0 = 0$

$b = t_3 = 1$

$f = \cos t^2$

$n = 3$

En los puntos $t_0 = 0$, $t_1 = \frac{1}{3}$, $t_2 = \frac{2}{3}$ y $t_3 = 1$ las iteraciones son respectivamente:

$$\boxed{\begin{aligned} y_0 &= 0 \\ y_1 &= 0 + \frac{1}{6}\left(1 + \cos\frac{1}{3}\right) = 0{,}3241 \\ y_2 &= 0{,}3241 + \frac{1}{6}\left(\cos\frac{1}{3} + \cos\frac{2}{3}\right) = 0{,}6126 \\ y_3 &= 0{,}6126 + \frac{1}{6}\left(\cos\frac{2}{3} + \cos 1\right) = 0{,}8336 \end{aligned}}$$

Universidad Antonio de Nebrija