

Expansión Internacional

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias



- ◆ Problemas de valor inicial
- ◆ Campo de direcciones
- ◆ Métodos numéricos para el problema de valor inicial
- ◆ Método de Euler
- ◆ Método de Heun
- ◆ Método de Euler modificado
- ◆ Método de Runge-Kutta

Problemas de valor inicial

◆ Ecuación diferencial

$$y'(t) = f(t, y(t)) \quad , \quad t \in [a, b]$$

◆ Condición inicial

$$y(a) = y_0$$

◆ Ejemplo: modelo de población de Verhulst

$$y'(t) = ay(t) - by(t)^2 \quad , \quad y(t_0) = y_0$$

Campo de direcciones

- ◆ Curvas solución de una ecuación diferencial

$$y = y(t) \quad , \quad t \in [a, b]$$

- ◆ Pendiente de las curvas solución

$$m = y'(t) = f(t, y(t)) \quad , \quad t \in [a, b]$$

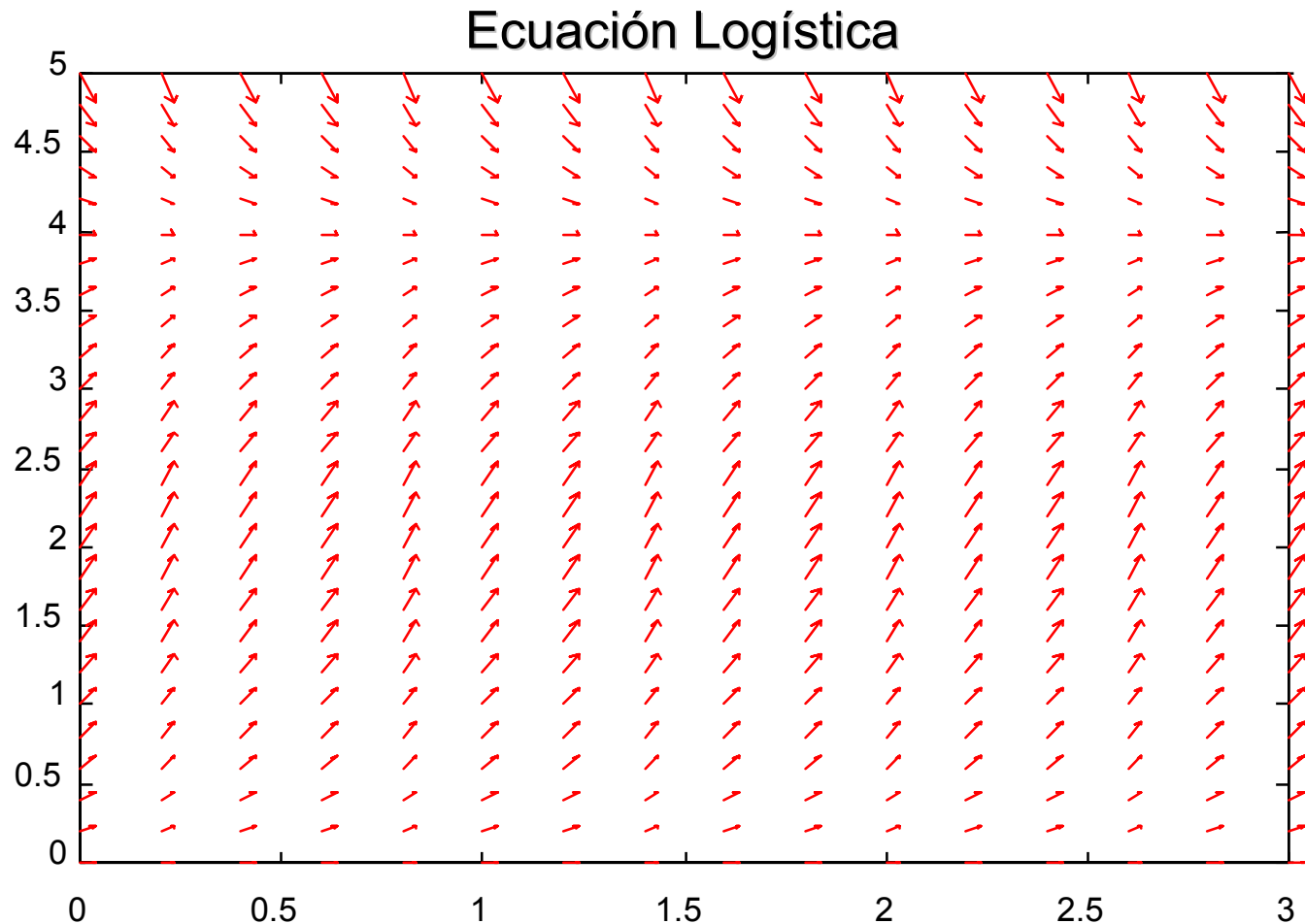
- ◆ Campo de direcciones

$$(t, y) \rightarrow \lambda(1, f(t, y)), \quad t \in [a, b], \quad y \in [c, d]$$

Campo de direcciones

- `t=a:h:b; y=c:h:d;`
- `[tt,yy] = meshgrid(t,y);`
- `uno = ones(size(tt));`
- `dy = f(tt,yy);`
- `quiver(tt,yy,uno,dy)`

Campo de direcciones



Métodos numéricos para el P.V.I.

◆ Problema de Valor Inicial

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad t \in [a, b], \quad y(a) = y_0$$

◆ Discretización

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$$

$$y_0 = y(t_0), \quad y_1 \cong y(t_1), \quad \cdots \quad y_n \cong y(t_n)$$

◆ Forma integral del problema de valor inicial

$$y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds$$

Métodos numéricos para el P.V.I.

- ◆ Error local del método iterativo

$$e_k = |y_k - y(t_k)|$$

- ◆ Error máximo

$$E(h) = \max_k e_k$$

- ◆ Convergencia

$$\lim_{h \rightarrow 0} E(h) = 0$$

- ◆ Método de orden p :

$$E(h) \cong Mh^p, \quad M = \text{const.}$$

Método de Euler

- ◆ Forma integral de la ecuación diferencial

$$y(t_1) = y(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} f(t, y(t)) dt$$

- ◆ Aproximación (Fórmula de los rectángulos)

$$y_1 = y_0 + (t_1 - t_0) f(t_0, y_0)$$

- ◆ Paso fijo $y_1 = y_0 + hf(t_0, y_0)$

- ◆ Método de Euler: para $k=1,2,\dots,n$

$$y_{k+1} = y_k + hf(t_k, y_k)$$

Método de Euler

④ `function [t,y]=mieuler(a,b,y0,n)`

④ `h=(b-a)/n; t=a:h:b;`

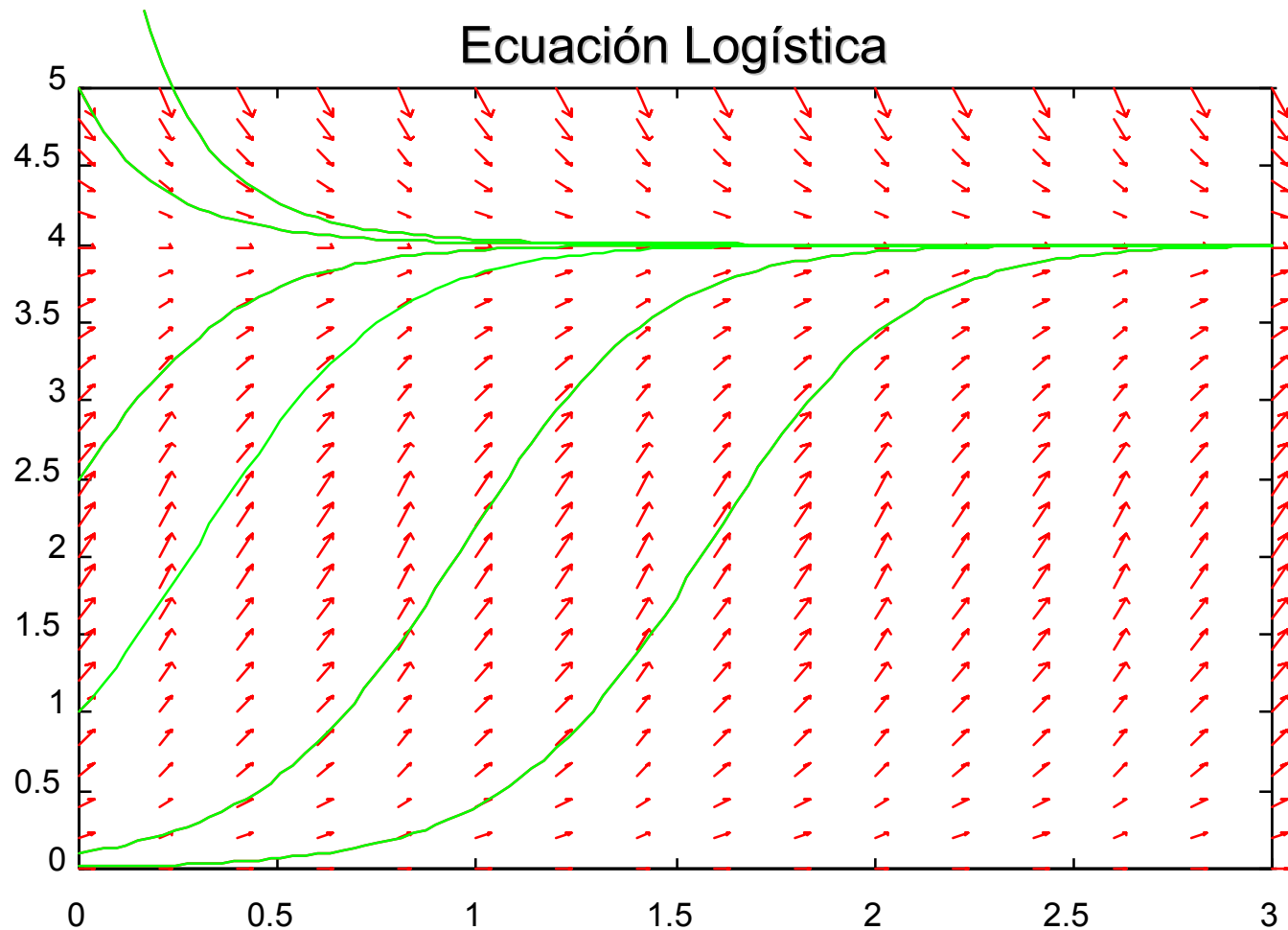
④ `y=zeros(size(t)); y(1)=y0;`

④ `for k=1:n`

④ `y(k+1)=y(k)+h*f(t(k),y(k));`

④ `end`

Soluciones aproximadas (Euler)



Método de Heun

- Forma integral de la ecuación diferencial

$$y(t_1) = y(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} f(t, y(t)) dt$$

- Aproximación (Fórmula de los trapecios)

$$\int_{t_0}^{t_1} f(t, y) dt \cong h / 2 (f(t_0, y_0) + f(t_1, y_1))$$

- Aproximación por Euler (predicción)

$$y_1^p = y_0 + hf(t_0, y_0)$$

- Método de Heun (corrección)

$$y_1 = y_0 + h / 2 (f(t_0, y_0) + f(t_1, y_1^p))$$

Método de Heun

```
④ function [t,y]=heun(a,b,y0,n)
④ h=(b-a)/n; t=a:h:b;
④ y=zeros(size(t)); y(1)=y0;
④ for k=1:n
④     k1=f(t(k),y(k));
④     ykp=y(k)+h*k1;
④     k2=f(t(k+1),ykp);
④     y(k+1)=y(k)+h/2*(k1+k2);
④ end
```

Método de Euler modificado

- ◆ Forma integral de la ecuación diferencial

$$y(t_1) = y(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} f(t, y(t)) dt$$

- ◆ Aproximación (Fórmula del punto medio)

$$\int_{t_0}^{t_1} f(t, y) dt \cong h f(t_0 + h/2, y(t_0 + h/2))$$

- ◆ Aproximación por Euler

$$y(t_0 + h/2) \cong y_{1/2} = y_0 + h/2 f(t_0, y_0)$$

- ◆ Método de Euler modificado

$$y_1 = y_0 + h f(t_0 + h/2, y_{1/2})$$

Método de Euler modificado

④ `function [t,y]=eulermod(a,b,y0,n)`

④ `h=(b-a)/n; t=a:h:b;`

④ `y=zeros(size(t)); y(1)=y0;`

④ `for k=1:n`

④ `yk2=y(k)+h/2*f(t(k),y(k));`

④ `y(k+1)=y(k)+h*f(t(k)+h/2,yk2);`

④ `end`

Método de Runge-Kutta

- ◆ Forma integral de la ecuación diferencial

$$y(t_1) = y(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} f(t, y(t)) dt$$

- ◆ Aproximación de la integral (Regla de Simpson)

$$\int_{t_0}^{t_1} f(t, y) dt \cong \frac{h}{6} (f(t_0, y_0) + 4f(t_{1/2}, y_{1/2}) + f(t_1, y_1))$$

Método de Runge-Kutta (cont.)

■ Estimaciones previas

$$k_1 = f(t_0, y_0)$$

$$k_2 = f(t_0 + h/2, y_0 + h/2 \cdot k_1)$$

$$k_3 = f(t_0 + h/2, y_0 + h/2 \cdot k_2)$$

$$k_4 = f(t_0 + h, y_0 + hk_3)$$

■ Aplicación de la fórmula

$$y_1 = y_0 + h/6(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

Método de Runge-Kutta

```
④ function [t,y]=rungekut(a,b,y0,n)
④ h=(b-a)/n; t=a:h:b;
④ y=zeros(size(t)); y(1)=y0;
④ for k=1:n
④     k1=f(t(k),y(k)); tk2=t(k)+h/2;
④     k2=f(tk2,y(k)+h/2*k1);
④     k3=f(tk2,y(k)+h/2*k2);
④     k4=f(t(k+1),y(k)+h*k3);
④     y(k+1)=y(k)+h/6*(k1+2*k2+2*k3+k4);
④ end
```

Comparación de métodos

Método	Orden del error	Evaluaciones funcionales
Euler	h	1
Heun	h^2	2
Euler modificado	h^2	2
Runge-Kutta	h^4	4