DEPENDENCIA LINEAL, BASE Y DIMENSIÓN

1.- Considerar los vectores (1, 2, 1), (1, 3, 2), (0, -1, -1) y (0, 0, 1) de $\mathbf{R}^3$. Responder a las siguientes cuestiones justificando la respuesta:

a) ¿son linealmente independientes?
b) ¿generan $\mathbf{R}^3$?
c) ¿forman base de $\mathbf{R}^3$?

2.- Responder a las siguientes preguntas con SI o NO. En el caso afirmativo dar un ejemplo y comprobar que verifica la situación. En el caso negativo dar una razón.

a) ¿Cuatro vectores en $\mathbf{R}^6$ pueden generar un subespacio vectorial de dimensión 5?
b) ¿Seis vectores en $\mathbf{R}^4$ pueden generar un subespacio vectorial de dimensión 5?
c) ¿Seis vectores en $\mathbf{R}^{10}$ pueden generar un subespacio vectorial de dimensión 4?
d) ¿Tres vectores en $\mathbf{R}^4$ pueden ser linealmente independientes?
e) ¿Cuatro vectores en $\mathbf{R}^2$ pueden ser linealmente independientes?

3.- Decide cuál de los siguientes conjuntos de vectores son linealmente independientes y cuáles de ellos son base del subespacio que generan:

a) $\{\overline{e}_1+\overline{e}_2,\ 2\overline{e}_2+2\overline{e}_3,\ \ldots,\ (n-1)\overline{e}_{n-1}+(n-1)\overline{e}_n\}$, siendo $\overline{e}_i$ los vectores de la base canónica de $\mathbf{R}^n$.

b) $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-3\\3\\5\\-120\end{pmatrix}\right\}$;

c) $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\4\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-3\\3\\5\\-120\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\4\\1\end{pmatrix}\right\}$;

d) $\left\{\begin{pmatrix}3\\-9\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}\right\}$;

e) $\left\{\begin{pmatrix}4\\4\\5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\6\\0\end{pmatrix}\right\}$

4.- Encontrar una base para Ker(A), siendo $A=\begin{pmatrix}0&1&-1&1\\-1&0&-1&0\\2&5&-3&0\\1&2&-1&0\end{pmatrix}$. ¿Cuál es la dimensión del subespacio Ker(A)?

5.- Demostrar o refutar las siguientes afirmaciones:

a) Si tres vectores de R^5 son linealmente independientes y tomamos un cuarto vector no nulo, entonces los cuatro son linealmente dependientes.
b) Si $A\cdot\overline{x}=\overline{0}$ tiene solución única, entonces las columnas de la matriz A son linealmente dependientes.
c) Ker(A) está generado por un vector no nulo si la forma REF de A tiene un solo pivote.
d) Las columnas de una matriz $A_{m\times n}$ de rango n son linealmente dependientes.

10.- Para qué valores de a los vectores $(1,a,1)$, $(a,1,1)$ y $(1,1,a)$ son linealmente dependientes? ¿Y para cuáles linealmente independientes?

11.- Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 8 & 2 \\ 3 & 6 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Se pide:

a) Calcular los valores de m y n para la aplicación lineal $f_A : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$.
b) Encontrar una base de la imagen de f_A.
c) Encontrar una base de Ker(A).

12.- Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a & b & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & d \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ para a, b, c, d constantes.

a) Demostrar que las filas de A son linealmente independientes para cualquier valor de a, b, c, d.
b) ¿Cuántas columnas de A son linealmente independientes? Seleccionalas.
c) Encontrar, si es posible, una base para el subespacio generado por las columnas de A que sea independiente de los valores de a, b, c, d.
d) Encontrar, si es posible, una base para el subespacio generado por las filas de A que sea independiente de los valores de a, b, c, d.

13.- Hallar representación paramétrica del subespacio de $\mathbf{R}^5$ formado por los vectores $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ que son solución de

$$\begin{cases} 3x_1 + x_3 + 2x_4 + 7x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_4 + 3x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 6x_5 = 0 \\ x_1 + x_3 + x_5 = 0 \end{cases}$$

14.- En $\mathbf{R}^4$ se consideran los subespacios W_1 y W_2 generados, respectivamente, por los sistemas de vectores: $S_1=\{(1,0,1,0\}, (0,1,0,1),(1,1,1,1)\}$
$S_2=\{(1,0,0,0),(2,1,0,1),(5,1,0,1)\}$

Hallar: a) Bases y dimensión de W_1 y de W_2.
b) Ecuaciones implícitas y una base de W_1+W_2.
c) Base de $W_1 \cap W_2$