PROBLEMAS DE TOPOLOGÍA EN $I\!R^n$

1.- Dibujar los siguientes recintos y decidir si son conjuntos abiertos, cerrados o compactos.

1) $A_1 = \{(t^2, t^2, t^2) \in I\!R^3 \mid 0 \leq t \leq 9\}$.
2) $A_2 = \{(t, t^2, t^2) \in I\!R^3 \mid t \in I\!R\}$.
3) $A_3 = \{(x, y) \in I\!R^2 \mid x^2 + 4y^2 = 4\}$.
4) $A_4 = \{(x, y) \in I\!R^2 \mid x^2 + y^2 + 2y - 4x \leq 4\}$.
5) $A_5 = \{(x, y) \in I\!R^2 \mid 2x \leq x^2 + y^2 \leq 4x,\ 0 \leq y \leq \sqrt{3}x\}$.
6) $A_6 = \{(x, y, z) \in I\!R^3 \mid 0 < x^2 - 2x + y^2 + 9z^2 < 3\}$.
7) $A_7 = \{(x, y, z) \in I\!R^3 \mid 1 \leq x^2 + y^2 < 4,\ z < x^2 + y^2\}$.
8) $A_8 = \{(x, y, z) \in I\!R^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 4,\ z^2 \geq x^2 + y^2,\ z \geq 0\}$.
9) $A_9 = \left\{(r, \theta, z) \in I\!R^+ \times [0, 2\pi] \times I\!R \;\middle|\; \frac{\pi}{6} < \theta < \frac{5\pi}{6},\ r = z\right\}$.
10) $A_{10} = \left\{(r, \theta, \varphi) \in I\!R^+ \times [0, 2\pi] \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \;\middle|\; 0 < \varphi < \frac{\pi}{2},\ \theta = \frac{\pi}{2}\right\}$.

2.- Hallar el interior, la adherencia, la frontera y los puntos de acumulación de los siguientes conjuntos.

1) $B_1 = \{(x, y) \in I\!R^2 \mid |x| \leq 1,\ |y| < 1\}$.
2) $B_2 = \{(x, y) \in I\!R^2 \mid |y| < x^2 - 1\} \cup \{(x, y) \mid x = y,\ -5 \leq x \leq 5\}$.
3) $B_3 = \{(x, y) \in I\!R^2 \mid |x| + |y| < 1\}$.
4) $B_4 = \{(x, y, z) \in I\!R^3 \mid 4x^2 - 2x + 9y^2 + 25z^2 \geq 8\}$.
5) $B_5 = \{(x, y, z) \in I\!R^3 \mid 4x^2 + 4y^2 + 8z^2 = 4\}$.
6) $B_6 = \{(x, y, z) \in I\!R^3 \mid xy \neq 0\}$.
7) $B_7 = \{(x, y, z) \in I\!R^3 \mid x + y + z > 0\} \cup \{(x, y, z) \mid x = 3, y = -3, z = -6\}$.
8) $B_8 = \{(x, y, z) \in I\!R^3 \mid x^2 + y^2 + 2x = 4\} \cup \{(x, y, z) \mid y = 2, x = z = 0\}$.

3.- Clasificar el punto $(0, 0)$ con respecto al conjunto $C = \left\{\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{m}\right) \mid n, m \in I\!N\right\}$.

4.- Describir los siguientes conjuntos en las coordenadas indicadas.

1) $D_1 = \{(x, y) \in I\!R^2 \mid x^2 + 4y^2 < 4\}$ en coordenadas polares.
2) $D_2 = \{(4 + 2cos(t), 4 + sen(t)) \in I\!R^2 \mid t \in I\!R\}$ en coordenadas cartesianas.
3) $D_3 = \{(x, y) \in I\!R^2 \mid 2x \leq x^2 + y^2 \leq 4x,\ 0 \leq y \leq \sqrt{3}x\}$ en coordenadas polares.
4) $D_4 = \{(t^2, t^2, t^2) \in I\!R^3 \mid -9 \leq t \leq 9\}$ en coordenadas cartesianas.
5) $D_5 = \{(t, t^2, t^2) \in I\!R^3 \mid -1 < t < 1\}$ en coordenadas cartesianas.
6) $D_6 = \{(x, y, z) \in I\!R^3 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4,\ z \leq x^2 + y^2\}$ en coordenadas cilíndricas.
7) $D_7 = \{(x, y, z) \in I\!R^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1,\ z^2 \geq x^2 + y^2,\ z \geq 0\}$ en coordenadas esféricas.
8) $D_8 = \{(x, y, z) \in I\!R^3\ |z^2 \leq x^2 + 6x + y^2 \leq |z|\}$ en coordendas cilíndricas cuyo centro es el punto $(-3, 0)$.
9) $D_9 = \left\{(r, \theta, z) \in I\!R^+ \times [0, 2\pi] \times I\!R \;\middle|\; \frac{\pi}{6} < \theta < \frac{5\pi}{6},\ r = z\right\}$ en coordenadas cartesianas.
10) $D_{10} = \left\{(r, \theta, \varphi) \in I\!R^+ \times [0, 2\pi] \times I\!R \;\middle|\; 0 < \varphi < \frac{\pi}{2},\ \theta = \frac{\pi}{2}\right\}$ en coordenadas cartesianas.