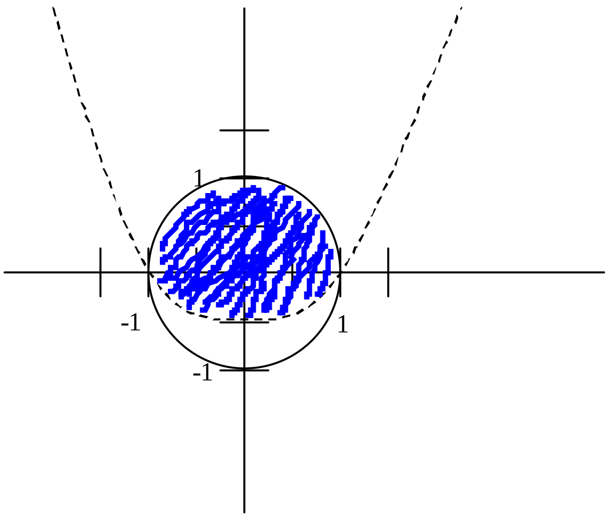
1. El conjunto A está dentro del círculo unidad y de la parábola, contiene el borde de la circunferencia pero no el de la parábola.



$$\overset{o}{A} = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 - 2y < 1,\ x^2 + y^2 < 1\}$$
$$\overline{A} = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 - 2y \le 1,\ x^2 + y^2 \le 1\}$$
$$Fr(A) = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 - 2y = 1,\ -1 \le x \le 1\} \bigcup \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1,\ -1 \le x \le 1\}$$

2.1.- $.\ Dom(f) = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x > 2y,\ x \neq y\} \bigcup \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \le 2y,\ y \neq 0\}$.

Para $x > 2y$, sólo hay problemas en el denominador $x - y \neq 0$.

Para $x = 2y$, la función es $\dfrac{2y-1}{y}$ que sólo da problemas cuando $y = 0$.

Para $x < 2y$, la función sólo da problemas cuando $y = 0$.

2.2.- $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(1,1)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{2y-1}{y} = \lim_{y\to 1} \frac{2y-1}{y} = 1$.

El punto $(1,1)$ está en el interior de $x < 2y$, por lo tanto la función utilizada es la última.

2.3.- El punto $(2,1)$ está en la frontera de $x = 2y$, por lo tanto necesitaremos calcular el límite y la imagen del punto.

Para calcular el límite necesitaremos acercarnos por 2 conjuntos diferentes:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(2,1)\\ \{x>2y\}}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(2,1)\\ \{x>2y\}}} \frac{xy - x + y}{x - y} = \frac{2-2+1}{2-1} = 1$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(2,1)\\ \{x\le 2y\}}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(2,1)\\ \{x\le 2y\}}} \frac{2y-1}{y} = 1$$

Por lo tanto, $\lim\limits_{(x,y)\to(2,1)} f(x,y)=1$. Además, $f(2,1)=\left.\dfrac{2y-1}{y}\right|_{y=1}=1$. Como estos valoren coinciden, la función es continua en el punto $(2,1)$.

2.4.- El punto $(2,1)$ está en la frontera de $x=2y$, por lo tanto necesitaremos calcular las derivadas parciales utilizando la definición.

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(2,1)}=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h,1)-f(2,1)}{h}$$

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(2+h,1)-f(2,1)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{\frac{(2+h)-(2+h)+1}{2+h-1}-1}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{-h}{h(h+1)}=-1$$

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(2+h,1)-f(2,1)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{\frac{2-1}{1}-1}{h}=0$$

La derivada parcial de $f(x,y)$ con respecto a x en el punto $(2,1)$ no existe.

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(2,1)}=\lim_{h\to 0}\frac{f(2,1+h)-f(2,1)}{h}$$

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(2,1+h)-f(2,1)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{\frac{2(h+1)-1}{h+1}-1}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h+1}=1$$

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(2,1+h)-f(2,1)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{\frac{2(h+1)-2+h+1}{2-(h+1)}-1}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{4}{1-h}=4$$

La derivada parcial de $f(x,y)$ con respecto a y en el punto $(2,1)$ no existe.

2.5.- El punto $(1,0)$ está en el interior de $x>2y$, por lo tanto la función $f(x,y)$ alrededor del punto es $(1,0)$ es $\dfrac{xy-x+y}{x-y}$. Es una función de clase C^2 y por lo tanto es diferenciable y su diferencial es

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{(y-1)(x-y)-(xy-x+y)}{(x-y)^2}\qquad \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(1,0)}=\frac{(-1)(1)-(0-1+0)}{1}=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{(x+1)(x-y)-(xy-x+y)(-1)}{(x-y)^2}\qquad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(1,0)}=\frac{(2)(1)-(-1)(-1)}{1}=1$$

$$D_f(1,0)(x,y)=0x+1y=y$$

3.1.- $$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ \{x=ly\}}}\frac{x}{\sqrt[3]{x^2+y^2}}=\lim_{y\to 0}\frac{ly}{\sqrt[3]{l^2y^2+y^2}}=\lim_{y\to 0}\frac{l\sqrt[3]{y}}{\sqrt[3]{l^2+1}}=0$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ \{y=0\}}}\frac{x}{\sqrt[3]{x^2+y^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt[3]{x^2}}=\lim_{y\to 0}\sqrt{x}=0$$

3.2.- $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2+y^2}} = \lim\limits_{r\to 0} \dfrac{r\cos(q)}{r^{\frac{2}{3}}} = \lim\limits_{r\to 0} (\sqrt{r}\cos(q)) = 0$.

3.3.- El vector es unitario, por lo tanto no hay que normalizarlo.

$$D_{\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} f(1,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f\left(1+\frac{h}{\sqrt{2}},\frac{h}{\sqrt{2}}\right) - f(1,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{1+\frac{h}{\sqrt{2}}}{\sqrt[3]{1+\frac{2h}{\sqrt{2}}+\frac{h^2}{2}+\frac{h^2}{2}}} - 1}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1+\frac{h}{\sqrt{2}} - \sqrt[3]{1+\sqrt{2}h+h^2}}{h\sqrt[3]{1+\sqrt{2}h+h^2}} \overset{(L'Hopital)}{=} \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{3}\left(1+\sqrt{2}h+h^2\right)^{\frac{-2}{3}}\left(\sqrt{2}+2h\right)}{\sqrt[3]{1+\sqrt{2}h+h^2} + h\frac{1}{3}\left(1+\sqrt{2}h+h^2\right)^{\frac{-2}{3}}\left(\sqrt{2}+2h\right)} =$$

$$= \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{3}\sqrt{2}}{1} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{3} = \frac{\sqrt{2}}{6} = \frac{1}{3\sqrt{2}}$$

.

4.- La función $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ es continua en $\mathbf{R}^2$, por ser la raíz cuadrada de un polinomio positivo. Es de clase C^2 en todo punto excepto en el (0,0,0) y su diferencial es

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

Si $(x_0,y_0,z_0) \neq (0,0,0)$, $D_f(x_0,y_0,z_0)(x,y,z) = \dfrac{x_0x+y_0y+z_0z}{\sqrt{x_0{}^2+y_0{}^2+z_0{}^2}}$