1.1.- En $R^2 - \{(0,0)\}$ la función es continua por ser tener en el denominador un polinomio, el denominador sólo se anula en el punto $(0,0)$ y es una raíz cuadrada de un polinomio positivo.

En el punto $(0,0)$ tenemos que aplicar la definición de continuidad.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 + y^3 - 6y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{r\to 0}\left(r\cos(q) + r^2 sen(q) - 6rsen(q)\right) = 0$$

$f(0,0) = 0.$

Como la imagen y el límite conincinden f es continua en R^2.

1.2.- En $R^2 - \{(0,0)\}$ la función es de clase C^2 (por las mismas razones descritas en el apartado anterior), por lo tanto es diferenciable en $R^2 - \{(0,0)\}$ y su diferencial es

$$D_f(x_0, y_0)(x,y) = \frac{2x_0\sqrt{x_0^2 + y_0^2} - (x_0^2 + y_0^3 - 6y_0^2)x_0\left(x_0^2 + y_0^2\right)^{-\frac{1}{2}}}{x_0^2 + y_0^2}x +$$

$$+\frac{\left(3y_0^2 - 12y_0\right)\sqrt{x_0^2 + y_0^2} - (x_0^2 + y_0^3 - 6y_0^2)y_0\left(x_0^2 + y_0^2\right)^{-\frac{1}{2}}}{x_0^2 + y_0^2}y$$

El punto $(0,0)$ tenemos que analizarlo por separado.

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)} = \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{h^2}{\sqrt{h^2}} - 0}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^2}{h|h|}$$ no existe ya que

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{h^2}{h|h|} = \lim_{h\to 0^+}\frac{h^2}{h^2} = 1$$

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{h^2}{h|h|} = \lim_{h\to 0^+}\frac{h^2}{-h^2} = -1$$

La función es diferenciable en $R^2 - \{(0,0)\}$ y su diferencial es

$$D_f(x_0, y_0)(x,y) = \frac{2x_0x + \left(3y_0^2 - 12y_0\right)y}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} - \frac{(x_0^2 + y_0^3 - 6y_0^2)\left(x_0x + y_0y\right)}{\left(x_0^2 + y_0^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

1.3.- La función $g(x,y) = x^2 + y^3 - 6y^2$. La matriz jacobiana es $J_g(x,y) = \left(2x \quad 3y^2 - 12y\right) = \left(2x \quad 3y(y-4)\right)$**.** Y los punto críticos son $(0,0)$ y $(0,4)$.

Para clasificar los puntos necesitamos la matriz hessiana: $H_g(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6y-12 \end{pmatrix}$. Entonces

$H_g(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -12 \end{pmatrix}$. $(0,0)$ es un punto de silla.

$H_g(0,4)=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 12\end{pmatrix}$. $(0,4)$ es un mínimo relativo.

1.4.- Como la función es continua y el conjunto es cerrado y acotado, podemos afirmar que existe el máximo y el mínimo valor. Para calcularlos dividiremos el problema en dos partes: el cálculo sobre el abierto y sobre la frontera. Para $\overset{o}{A}$ aprovechamos los datos del apartad anterior. Hay dos puntos el $(0,0)\in \overset{o}{A}$ y $(0,4)\notin \overset{o}{A}$.

Para la frontera $Fr\,(A)=\{(x,y)/\ x^2+y^2=1\}$, consideraremos los multiplicadores de Lagrange (lo podemos realizar porque verifica todas las condiciones excepto para el punto $(0,0)$, que no está en la frontera): $F(x,y,l)=x^2+y^3-6y^2+l(x^2+y^2-1)$. Hay que resolver el sistema $\begin{cases} 2x+2lx=0\\ 3y^2-12y+2ly=0\\ x^2+y^2=1\end{cases}$.De la primera ecuación tenemos dos casos:

CASO A: $x=0$.

De la tercera ecuación sacamos $y=\pm 1$. Y de la segunda para $y=1,\ l=\frac{9}{2}$ e $y=-1,\ l=-\frac{15}{2}$. Tenemos dos puntos $(0,1)$ y $(0,-1)$.

CASO B: $x\neq 0$ y por lo tanto $l=-1$. Ahora la segunda ecuación es $y(3y-14)=0$. Por lo tanto $y=0$ ó $y=\frac{14}{3}$. De la tercera ecuación tenemos que para $y=0,\quad x=\pm 1$ pero para $y=\frac{14}{3}$, la ecuación no tiene solución real.

Recopilando los puntos y viendo sus imágenes tenemos

$f(0,0)=0$, $f(0,1)=-5$, $f(0,-1)=-7$, $f(1,0)=1$, $f(-1,0)=1$

Así, el máximo absoluto es 1 y se alcanza en $(\pm 1,0)$ y el mínimo absoluto es -7 en $(0,-1)$.

2.1.-La región es un disco centrado en el punto $(0,0)$ y cuyo radio menor es 1 y el radio mayor es 3. Utilizaremos coordenadas polares

$$\iint_{D_1}\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy=\int_0^{2p}\left(\int_1^3 rrdr\right)dq=\int_0^{2p}\left(\frac{r^3}{3}\right]_{r=1}^{r=3}dq=2p\left(9-\frac{1}{3}\right)=\frac{52}{3}p\ ,$$

2.2.-La región es un cono cuyo vértice está en el punto $(0,0,0)$ y su altura es 2. Utilizaremos coordenadas cilíndricas. Como hemos dicho $0\le z\le 2$, y para cada altura de z tenemos un disco centrado en el punto $(0,0,z)$ y de radio z $(r^2=x^2+y^2\le z^2)$

$$\iiint_{D_2} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz = \int_0^{2p}\left(\int_0^2\left(\int_0^z \sqrt{r^2+z^2}\,rdr\right)dz\right)dq = \int_0^{2p}\left(\int_0^2\left(\left[\frac{\left(r^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}{3}\right]_{r=0}^{r=z} dz\right)\right)dq =$$

$$= \int_0^{2p}\left(\int_0^2\left(\frac{2^{\frac{3}{2}}z^3}{3}-\frac{z^3}{3}\right)dz\right)dq = \int_0^{2p}\left[\frac{2^{\frac{3}{2}}z^4}{12}-\frac{z^4}{12}\right]_{z=0}^{z=2} dq = 2p\left(\frac{2^{\frac{3}{2}}4}{3}-\frac{4}{3}\right) = 2p\,\frac{2^{\frac{7}{2}}-4}{3}$$

3-. El sólido es el interior de un cilindro infinito cuya base es un círculo centrado en $(0,0,z)$ y de radio 1.
Esta figura se interseca con una esfera de radio 2. Por lo tanto el sólido se puede dividir en tres partes:
D_1 es el cilindro anterior pero su altura está acotada cuando se junta con la esfera:

$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x^2+y^2+z^2=4 \end{cases}$ implica que $z^2=3$. Por lo tanto $-\sqrt{3}\le z\le\sqrt{3}$.

Para calcular este volumen utilizaremos coordenadas cilíndricas:

$$\iint_{D_1} dxdydz = \int_0^{2p}\left(\int_0^1\left(\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} rdz\right)dr\right)dq = \int_0^{2p}\left(\int_0^1\left(r\left(\sqrt{3}+\sqrt{3}\right)\right)dr\right)dq = 2\sqrt{3}\int_0^{2p}\left(\left[\frac{r^2}{2}\right]_{r=0}^{r=1}\right)dq = 2\sqrt{3}\cdot 2p\,\frac{1}{2} = 2\sqrt{3}p$$

D_2 es la parte de la esfera que queda encima del cono. Utilizaremos coordenadas esféricas, solamente tenemos restricciones sobre j : el j más grande es $j=\frac{p}{2}$ y el más pequeño ocurre en

$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x^2+y^2+z^2=4 \end{cases}$. Es decir, $1=x^2+y^2=r^2\cos^2(j)=4\cos^2(j)$. Así, $\cos(j)=\pm\frac{1}{2}$

$$\iint_{D_2} dxdydz = \int_0^{2p}\left(\int_0^2\left(\int_{\frac{p}{3}}^{\frac{p}{2}}\left(r^2\cos(j)\right)dj\right)dr\right)dq = \int_0^{2p}\left(\int_0^2\left(r^2 sen(j)\right]_{j=\frac{p}{3}}^{j=\frac{p}{2}} dr\right)dq = \int_0^{2p}\left(\frac{r^3}{3}\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]_{r=0}^{r=2} dq =$$

$$\frac{16p}{3}\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

D_3 es la parte de la esfera que queda debajo del cono. Utilizaremos coordenadas esféricas, solamente tenemos restricciones sobre j : el j más pequeño es $j=-\frac{p}{2}$ y el más grande $j=-\frac{p}{3}$.

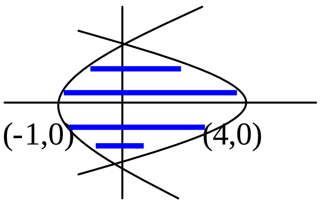
$$\iint_{D_2} dxdydz = \int_0^{2p}\left(\int_0^2\left(\int_{-\frac{p}{2}}^{-\frac{p}{3}}\left(r^2\cos(j)\right)dj\right)dr\right)dq = \int_0^{2p}\left(\int_0^2\left(r^2 sen(j)\right]_{j=-\frac{p}{2}}^{j=-\frac{p}{3}} dr\right)dq = \int_0^{2p}\left(\frac{r^3}{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+1\right)\right]_{r=0}^{r=2} dq =$$

$$\frac{16p}{3}\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Por lo tanto

$$Vol(D) = \iiint_D dxdydz = \iiint_{D_1} dxdydz + \iiint_{D_2} dxdydz + \iiint_{D_3} dxdydz = 2\sqrt{3}p + \frac{16}{3}p\left(2-\sqrt{3}\right) = \frac{32-10\sqrt{3}}{3}p$$

La región es



Tenemos que saber los puntos de corte que son $\begin{cases} y^2 = 4 - x \\ y^2 = 4 + 4x \end{cases}$ $(0,-2)$ y $(0,2)$

$$Area(A) = \iint_A dxdy = \int_{-2}^{2}\left(\int_{\frac{y^2-4}{4}}^{4-y^2} dx\right)dy = \int_{-2}^{2}\left(4 - y^2 - \frac{y^2-4}{4}\right)dy = \int_{-2}^{2}\left(5 - \frac{5y^2}{4}\right)dy = \left(5y - \frac{5y^3}{12}\right]_{y=-2}^{y=2} =$$

$$10 - \frac{10}{3} + 10 - \frac{10}{3} = \frac{40}{3}$$

4.1.-Es una ecuación en forma diferencial donde $\begin{cases} M(x,y) = -2xy \\ N(x,y) = x^2 + y \end{cases}$**.** Veamos si es exacta $\left(\begin{array}{l} \frac{\partial M}{\partial y} = -2x \\ \frac{\partial N}{\partial x} = 2x \end{array}\right.$.

No es exacta, busquemos un factor integrante $m(y) = e^{\int \frac{-2x-2x}{-2xy}dy} = e^{-2\log(y)} = \frac{1}{y^2}$..

Entonces la ecuación exacta es $\left(y + x^2\right)dy - 2yxdx = 0$:$\begin{cases} M(x,y) = \frac{-2x}{y} \\ N(x,y) = \frac{x^2}{y^2} + \frac{1}{y} \end{cases}$ y $\left(\begin{array}{l} \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{2x}{y^2} \\ \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{2x}{y^2} \end{array}\right.$

$$F(x,y) = \int -\frac{2x}{y}dx + C(y) = -\frac{x^2}{y} + C(y).$$

$\frac{x^2}{y^2} + \frac{1}{y} = \frac{x^2}{y^2} + C'(y)$. Por lo tanto, $C(y) = \int \frac{dy}{y} = \log(y)$.

La solución es $-\frac{x^2}{y} + \log(y) = C$.

4.2. La ecuación de de segundo orden convertible a primer orden con el cambio $y'' = z'$ e $y' = z$. La nueva ecuación es $z' + xz - x = 0$. Es una ecuación de variables separables:

$\frac{dz}{1-z} = xdx$. Así, $\frac{x^2}{2} + C = -\log(1-z)$. $z = 1 - e^{-\frac{x^2}{2}+c} = 1 + Ce^{-\frac{x^2}{2}}$. Deshaciendo el cambio tenemos

$\frac{dy}{dx} = 1 + Ce^{-\frac{x^2}{2}}$.

La solución es $y = x + C\int e^{-\frac{x^2}{2}dx} + D$.