1.1.- Para $x_0 + y_0 < 0$ la función es un polinomio y por tanto es continua en estos puntos.

Para $x_0 + y_0 > 0$ la función es continua por ser la suma de un polinomio más la raíz cuadrada del polinomio $x + y > 0$ en estos puntos.

Para $x_0 + y_0 = 0$, necesitamos estudiarla en detalle. Calcularemos primero $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ y para ello lo hacemos con dos límites sobre conjuntos:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\ \{x+y\le 0\}}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\ \{x+y\le 0\}}} (x+y) = x_0 + y_0 = 0$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\ \{x+y>0\}}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\ \{x+y>0\}}} \left(\sqrt{x+y} + xy\right) = \sqrt{x_0 + y_0} + x_0 y_0 = -x_0^{\,2}.$$

El límite existe solamente para $x_0 = 0$ y el límite es 0. Para el resto de los puntos no existe el límite y por lo tanto no es continua. Para $(0,0)$, $f(0,0) = 0$ y por lo tanto podemos afirmar que el continua en este punto ya que coincide el límite con la imagen.

La función es continua en $R^2 - \{(x,-x) \mid x \neq 0\}$.

1.2.- Para $x_0 + y_0 < 0$ la función es de clase C^2 y por lo tanto podemos afirmar que es difereneciable.

Su diferencial es:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} = \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} = 1 \quad \text{. Así } D_{(x_0,y_0)} f(x,y) = x + y \text{ .}$$

Para $x_0 + y_0 > 0$ la función es de clase C^2 porque la raíz cuadrada nunca se anula. La función es diferenciable y su diferencial es:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} = \left.\left(\frac{1}{2\sqrt{x+y}} + y\right)\right|_{(x_0,y_0)} = \frac{1}{2\sqrt{x_0 + y_0}} + y_0,$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} = \left.\left(\frac{1}{2\sqrt{x+y}} + x\right)\right|_{(x_0,y_0)} = \frac{1}{2\sqrt{x_0 + y_0}} + x_0$$

$$D_{(x_0,y_0)} f(x,y) = \frac{x+y}{2\sqrt{x_0 + y_0}} + x_0 y + x y_0$$

Para $(x_0,-x_0)$ con $x_0 \neq 0$ la función no es diferenciable por no ser continua.

Para $(0,0)$ tenemos que calcular primero las derivadas parciales. Para $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(h,0) - f(0,0)}{h}$ necesitamos estudiar dos límites:

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{\sqrt{h}+0-0}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{h}}=\infty$$. No existe la derivada parcial y por lo tanto no es diferenciable en (0,0).

1.3.- La dirección no es unitaria, así que hay que tomar como dirección el vector dividido entre su norma: $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$$D_{\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}f(1,1)=\lim_{h\to 0}\frac{f\left((1,1)+h\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)-f(1,1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f\left(1+\frac{h}{\sqrt{2}},1-\frac{h}{\sqrt{2}}\right)-f(1,1)}{h}=$$

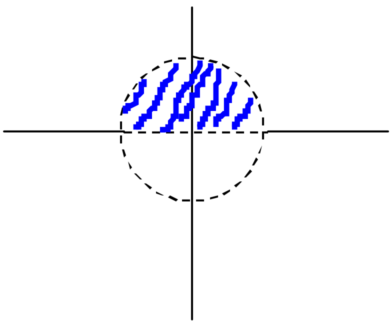
$$\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{1+\frac{h}{\sqrt{2}}+1-\frac{h}{\sqrt{2}}}+\left(1+\frac{h}{\sqrt{2}}\right)\left(1-\frac{h}{\sqrt{2}}\right)-\sqrt{2}-1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{2}+1-\frac{h^2}{2}-\sqrt{2}-1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-h}{2}=0$$

2-. Utilizaremos coordenadas esféricas para el cálculo

$$\iiint_D\frac{dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2}}=\int_0^{2p}\left(\int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}}\left(\int_0^1\frac{r^2\cos(j)}{\sqrt{r^2\cos^2(q)\cos^2(j)+r^2 sen^2(q)\cos^2(j)}}dr\right)dj\right)dq=$$

$$\int_0^{2p}\left(\int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}}\left(\int_0^1 rdr\right)dj\right)dq=\int_0^{2p}\left(\int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}}\left(\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^1 dj\right)\right)dq=\int_0^{2p}\left(\left[\frac{j}{2}\right]_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}}dq\right)=\left(\left[\frac{qp}{2}\right]_0^{2p}\right)=p^2$$

3-.



A es el semicírulo superior sin considerar el contorno.

A es abierto por lo tanto coincide con su interior: $\overset{o}{A}=A$.

La adherencia es el interior junto con el contorno $\overline{A}=\left\{\left((x,y)\in R^2\mid x^2+y^2\le 1,\ y\ge 0\right)\right\}$.

La frontera es el contorno $Fr(A)=\left\{x^2+y^2=1,\ y\in[0,1]\right\}\cup\left\{(x,0)\in R^2\mid x\in[-1,1]\right\}$.

Para el área usaremos coordenadas polares:

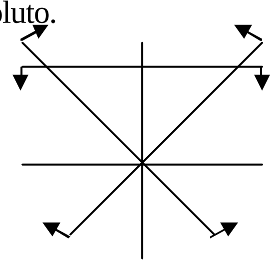
$$Area(A)=\iint_A dxdy=\int_0^p\left(\int_0^1 rdr\right)dq=\int_0^p\left(\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^1 dq\right)=\left(\left[\frac{q}{2}\right]_0^p\right)=\frac{p}{2}$$

4-. Sustituyendo directamente tenemos una indeterminación. Empezaremos a acercarnos por las direcciones $y=lx-l$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(1,0)\\ \{y=lx-l\}}}\frac{y\log(x)}{(x-1)^2}=\lim_{x\to 1}\frac{(lx-l)\log(x)}{(x-1)^2}=\lim_{x\to 1}\frac{l\log(x)}{x-1}\overset{L'Hopital}{=}\lim_{x\to 1}\frac{\frac{l}{x}}{1}=l\ .$$

Como el límite direccional depende de la dirección en la que nos acerquemos. El límite no existe.

5-. La función es continua y el conjunto es cerrado y acotado; por lo tanto existe el máximo y el mínimo absoluto.



Empezaremos a calcular los posible valores en el interior del triángulo:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y(x-1)-xy}{(x-1)^2} = \frac{-y}{(x-1)^2} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{x-1} = 0$$

El punto que sale es (0,0) que no está en el interior.

Para la frontera tenemos distintos conjuntos:

$x = y$: Podemos considerar la función $\tilde{f}(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$

$\tilde{f}'(x) = \dfrac{2x(x-1)-x^2}{(x-1)^2} = \dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2} = 0$. Tenemos dos puntos $(0,0)$ y $(2,2)$.

$x + y = 0$: Consideramos la función $\hat{f}(x) = -\dfrac{x^2}{x-1} = -\tilde{f}(x)$. Así que obtendremos la misma derivada pero cambiada de signo, así que tenemos los puntos $(0,0)$ y $(2,-2)$.

$y = 3$: Tenemos la función $\bar{f}(x) = \dfrac{3x}{x-1}$

$\bar{f}'(x) = \dfrac{3(x-1)-3x}{(x-1)^2} = \dfrac{-3}{(x-1)^2} = 0$. No obtenemos ningún punto.

Recopilando los puntos obtenidos más los puntos de intersección tenemos $(0,0)$, $(2,2)$, $(2,-2)$, $(3,3)$ y $(-3,3)$ cuyos valores son 0, 4, -4, $\dfrac{9}{2}$ y $\dfrac{9}{4}$, respectivamente. Por lo tanto el valor máximo es $\dfrac{9}{2}$ y se alcanza en el punto $(3,3)$ y el valor mínimo es -4 y se alcanza en el $(2,-2)$.

4.1.- Puede ser exacta con $M = 5 + 2x - 2y^2$ y $N = -2y$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -4y \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = 0$$

No es exacta, pero podemos calcular un factor integrante $m(x) = e^{\int \frac{-4y}{-2y}dx} = e^{2x}$.

Ahora $M = \left(5 + 2x - 2y^2\right)e^{2x}$ y $N = -2ye^{2x}$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -4ye^{2x} \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = -4ye^{2x}$$

Es ahora exacta y $F(x,y) = \int \left(5 + 2x - 2y^2\right)e^{2x}dx = \left(\dfrac{5}{2} + x - \dfrac{1}{2} - y^2\right)e^{2x} + C(y)$

Por otro lado $-2ye^{2x} = \dfrac{\partial F}{\partial y} = -2ye^{2x} + C'(y)$ y tenemos que $C(y) = 0$.

La solución es $(2+x-y^2)e^{2x} = C$.

4.2.- Realizamos el cambio $z = y'$ y $z'z = y''$. La ecuación resultante es $4z'z = y$.

$\int 4zdz = \int ydy$. Es decir $2z^2 = \dfrac{y^2}{2} + C$. Despejamos y tenemos $y' = z = \pm\sqrt{\dfrac{y^2}{4} + C}$.

Así $\displaystyle\int \frac{\pm\, dy}{\sqrt{\dfrac{y^2}{4} + C}} = \int dx$. Integrando se obtiene $x = \pm 2\log\left(\dfrac{y}{2} + \sqrt{\dfrac{y^2}{4} + C}\right) + D$