SOLUCIONES DE DIFERENCIABILIDAD

Ejercicio 1.-

1.1.- $\dfrac{\partial f_1}{\partial x}(0,0) = 0$ y $\dfrac{\partial f_1}{\partial y}(0,0) = 0$.

$\dfrac{\partial f_1}{\partial x}(1,0) = 2$ y $\dfrac{\partial f_1}{\partial y}(1,0) = 0$.

$\dfrac{\partial f_1}{\partial x}(0,1) = 0$ y $\dfrac{\partial f_1}{\partial y}(0,1) = -3$.

1.2.- Si $x_0 = 0$ o $y_0 = 0$, no existe las derivadas parciales.

Para el resto de puntos, $\dfrac{\partial f_2}{\partial x}(x_0, y_0) = \dfrac{e^{x_0 y_0}}{x_0} - \dfrac{e^{x_0 y_0}}{x_0^2 y_0}$ y $\dfrac{\partial f_2}{\partial y}(x_0, y_0) = \dfrac{e^{x_0 y_0}}{y_0} - \dfrac{e^{x_0 y_0}}{x_0 y_0^2}$.

1.3.- $\dfrac{\partial f_3}{\partial x}(0,1) = 0$ y $\dfrac{\partial f_3}{\partial y}(0,1) = 0$.

1.4.- $\dfrac{\partial \overline{f}_4}{\partial x}(0,1) = \left(1, \dfrac{-3}{4}\right)$ y $\dfrac{\partial \overline{f}_4}{\partial y}(0,1) = (0,-1)$.

No existen las derivadas parciales en el punto $(2,1)$.

1.5.- $\dfrac{\partial \overline{f}_5}{\partial x}(1,1,0) = (\log(2)+2, 0)$, $\dfrac{\partial \overline{f}_5}{\partial y}(1,1,0) = (\log(2)+2, 0)$ y $\dfrac{\partial \overline{f}_5}{\partial z}(1,1,0) = (0,1)$.

1.6.- $\dfrac{\partial \overline{f}_6}{\partial x}(1,-1,\pi) = (1, 4e^{-1-\pi}, -3)$, $\dfrac{\partial \overline{f}_6}{\partial y}(1,-1,\pi) = (1, 4e^{-1-\pi}, 1)$ y

$\dfrac{\partial \overline{f}_6}{\partial z}(1,-1,\pi) = (0, -4e^{-1-\pi}, 1)$.

1.7.- $\dfrac{\partial \overline{f}_7}{\partial x}(x_0, y_0) = (x_0 \mathrm{sen} x_0 \mathrm{sen} y_0 + \cos x_0 \mathrm{sen} y_0, y_0 e^{x_0 y_0})$ y

$\dfrac{\partial \overline{f}_7}{\partial y}(x_0, y_0) = (x_0 \cos x_0 \cos y_0, x_0 e^{x_0 y_0})$

1.8.- $\dfrac{\partial \overline{f}_8}{\partial x}(e,0) = 6e$ y $\dfrac{\partial \overline{f}_7}{\partial y}(e,0) = 0$.

1.9.- Los puntos $(x_0, 0, 0)$ no tienen derivadas parciales.

Para el resto de puntos, $\dfrac{\partial \overline{f}_9}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) = \left(\dfrac{2y_0^2 + 2z_0^2}{(y_0^2+z_0^2)^2 + 4x_0^2}, 2x_0 e^{x_0^2+y_0^2+z_0^2}\right)$,

$\dfrac{\partial \overline{f}_9}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) = \left(\dfrac{-4x_0 y_0}{(y_0^2+z_0^2)^2 + 4x_0^2}, 2y_0 e^{x_0^2+y_0^2+z_0^2}\right)$ y

$\dfrac{\partial \overline{f}_9}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = \left(\dfrac{-4x_0 z_0}{(y_0^2+z_0^2)^2 + 4x_0^2}, 2z_0 e^{x_0^2+y_0^2+z_0^2}\right)$.

1.10.- $\dfrac{\partial f_{10}}{\partial x}\left(\dfrac{a}{2}, \dfrac{a}{2}\right) = \dfrac{-1}{\sqrt{2}}$ y $\dfrac{\partial f_{10}}{\partial y}\left(\dfrac{a}{2}, \dfrac{a}{2}\right) = \dfrac{-1}{\sqrt{2}}$

1.11.- $\dfrac{\partial f_{11}}{\partial x}(x_0, y_0) = 2x_0 \mathrm{sen} y_0 - y_0 \mathrm{sen} x_0$ y $\dfrac{\partial f_{11}}{\partial y}(x_0, y_0) = x_0^2 \cos y_0 \cos x_0$.

1.12.- $\dfrac{\partial f_{12}}{\partial x}(0,0) = 1$ y $\dfrac{\partial f_{12}}{\partial y}(0,0) = 0$.

1.13.- $\dfrac{\partial f_{13}}{\partial x}(1,2,3) = e^6$, $\dfrac{\partial f_{13}}{\partial y}(1,2,3) = e^6$ y $\dfrac{\partial f_{13}}{\partial z}(1,2,3) = e^6$.

1.14.- $\dfrac{\partial \overline{f}_{14}}{\partial x}(0,0) = (0,1,0)$ y $\dfrac{\partial \overline{f}_{14}}{\partial y}(0,0) = (1,0,0)$.

1.15.- $\dfrac{\partial f_{15}}{\partial x}(1,0) = 1$ y $\dfrac{\partial f_{15}}{\partial y}(1,0) = 0$.

Ejercicio 2

2.1.- $D_{f_1}(0,0)(x,y) = 0$.
$D_{f_1}(1,0)(x,y) = 2x$.
$D_{f_1}(0,1)(x,y) = -3y$.

2.2.- No es diferenciable en los puntos que verifican que $x_0 = 0$ o $y_0 = 0$.
Para el resto de puntos, $D_{f_2}(x_0,y_0)(x,y) = e^{x_0y_0}\left(\dfrac{x_0y_0-1}{x_0^2y_0}x + \dfrac{x_0y_0-1}{x_0y_0^2}y\right)$.

2.3.- $D_{f_3}(0,1)(x,y) = 0$.
$D_{f_3}(2,0)(x,y) = 0$.

2.4.- $D_{\overline{f}_4}(0,1)(x,y) = \left(x, \dfrac{-3}{4}x - y\right)$.
No es diferenciable en el punto $(2,1)$.

2.5.- $D_{\overline{f}_5}(1,1,0)(x,y,z) = ((\log(2)+2)(x+y), z)$.

2.6.- $D_{\overline{f}_6}(1,-1,\pi)(x,y,z) = (x+y, 4e^{-1-\pi}(x+y-z), -3x+y+z)$.

2.7.- $D_{\overline{f}_7}(x_0,y_0)(x,y) = ((x_0\mathrm{sen}x_0\mathrm{sen}y_0 + \cos x_0\mathrm{sen}y_0)x + (x_0\cos x_0\cos y_0)y, e^{x_0y_0}(y_0x + x_0y)$.

2.8.- $D_{f_8}(e,0)(x,y) = 6ex$.

2.9.- No es diferenciable en los puntos $(x_0,0,0)$.
Para el resto de puntos, $D_{\overline{f}_9}(x_0,y_0,z_0)(x,y,z) = \left(\dfrac{(2y_0^2+2z_0^2)x - 4x_0y_0y - 4x_0z_0z}{(y_0^2+z_0^2)^2 + 4x_0^2}\right.,$
$\left.2e^{x_0^2+y_0^2+z_0^2}(x_0x + y_0y + z_0z)\right)$.

2.10.- $D_{f_{10}}\left(\dfrac{a}{2},\dfrac{a}{2}\right)(x,y) = \dfrac{-(x+y)}{\sqrt{2}}$.

2.11.- $D_{f_{11}}(x_0,y_0)(x,y) = (2x_0\mathrm{sen}y_0 - y_0\mathrm{sen}x_0)x + (x_0^2\cos y_0\cos x_0)y$.

2.12.- $D_{f_{12}}(0,0)(x,y) = x$.

2.13.- $D_{f_{13}}(1,2,3)(x,y,z) = e^6(x+y+z)$.

2.14.- $D_{\overline{f}_{14}}(0,0)(x,y) = (y,x,0)$.

2.15.- $D_{f_{15}}(1,0)(x,y) = x$.

Ejercicio 3

3.1.- $D_{\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)}f_1(0,0) = 0$.

3.2.- $D_{\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)}f_2(3,4) = \dfrac{-1}{5\sqrt{15}}$.

3.3.- $D_{\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}\overline{f}_3(2,0,2\pi) = \left(\dfrac{3}{\sqrt{2}}, \dfrac{-1}{\sqrt{2}}\right)$.

3.4.- $D_{\frac{3\pi}{2}}\overline{f}_4(2,4) = (-8,-2)$.

3.5.- $D_{\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{-2}{3}\right)}\overline{f}_5(0,0,0) = \dfrac{2}{3}$.

3.6.- $D_{(a,\sqrt{1-a^2})}f_6(2,1) = 24a + 10\sqrt{1-a^2}$.

En $a = \dfrac{\pm 12}{13}$ la derivada es máxima.

Ejercicio 4

4.1.- $J_{\overline{f}_1}(x,y) = \begin{pmatrix} x^y \dfrac{y}{x} & x^y \log(x) \\ \dfrac{1}{x} & \dfrac{1}{y} \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

4.2.- $J_{\overline{f}_2}(x) = \begin{pmatrix} xe^x + e^x \\ \operatorname{sen}(\cos(x))\operatorname{sen}(x) \end{pmatrix}$.

4.3.- $J_{f_3}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x\log(z) + \dfrac{y}{\sqrt{x}} - yz & \sqrt{x} - xz & \dfrac{x^2}{z} - xy \end{pmatrix}$.

4.4.- $J_{\overline{f}_4}(x,y,z) = \begin{pmatrix} yz & xz & xy \\ y & x & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

4.5.- $J_{\overline{f}_5}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 6 & -3 & -4 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 5 Las derivadas parciales en el origen son 0.

No existe el límite en el origen y por lo tanto no es continua.

Ejercicio 6

6.1.- No es diferenciable en el origen.
6.2.- $D_{f_2}(0,0)(x,y) = 0$.
6.3.- $D_{f_3}(0,0)(x,y) = x - y$.
6.4.- No es diferenciable en el origen.
6.5.- Si $a \leq \dfrac{1}{2}$ no es diferenciable en el origen.

Si $a > \dfrac{1}{2}$, $D_{f_5}(0,0)(x,y) = 0$.

6.6.- $D_{f_6}(0,0)(x,y) = 0$.
6.7.- $D_{f_7}(0,0)(x,y) = 0$.
6.8.- No es diferenciable en el origen.
6.9.- No es diferenciable en el origen.

Ejercicio 7 $\bigtriangledown f(0,0,0) = (0,0,0)$.

Ejercicio 8 En la dirección $\left(\dfrac{-4}{e}, 0\right)$.

Ejercicio 9

9.1.- Es continua en $\mathbb{R}^2$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3x^5+3x^3y^2-2x^4-2xy^3}{(x^2+y^2)^2} & \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0) \\ 1 & \text{si} \quad (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3y^5+3y^3x^2-2y^4-2yx^3}{(x^2+y^2)^2} & \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0) \\ 1 & \text{si} \quad (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

9.2.- $D_\theta f(0,0) = \cos^3(\theta) + \operatorname{sen}^3(\theta)$.

9.3.- $D_f(1,2)(x,y) = \dfrac{-14x+36y}{25}$.

Ejercicio 10

10.1.- $T_3 f_1(0,0)(x,y) = x + y + \dfrac{x^2+y^2}{2} + xy - \dfrac{x^3+y^3}{3} - x^2y - y^2x$.

10.2.- $T_3 f_2(1,2)(x,y) = 38 + 17(x-1) + 39(y-2) - 8(x-1)^2 + 30(x-1)(y-2) +$
$+ 9(y-2)^2 + (x-1)^3 - 3(x-1)^2(y-2) + 9(x-1)(y-2)^2$.

10.3.- $T_3 f_3(2,1,1)(x,y,z) = 1 + (x-1) - 2(y-1) - (z-1) + \dfrac{1}{2}((x-2)^2 - 4(x-2)(y-1) +$
$+ 4(y-1)^2 - 2(x-2)(z-1) + 6(y-1)(z-1) + (z-1)^2) + \dfrac{1}{6}((x-2)^2 - 3(x-2)^2(y-1) -$
$- 3(x-2)(y-1)^2 - 6(x-2)^2(z-1) + 3(x-2)(z-1)^2 + 18(x-2)(y-1)(z-1) +$
$8(y-1)^3 - (z-1)^3)$.

Ejercicio 11

11.1.- $H_{f_1}(0,0,0) = \begin{pmatrix} 4\pi & 0 & 3 \\ 0 & \dfrac{-3}{4\sqrt{2}} & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

11.2.- $H_{f_2}(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

11.3.- $H_{f_3}(0,1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{4}{3}e \\ 0 & \dfrac{4}{3}e & 0 \end{pmatrix}$.

Ejercicion 12 $z = 3\theta - \dfrac{3\pi}{2}$.

Ejercicio 13 No es ni continua ni diferenciable en el origen.

Ejercicio 14 La derivada direccional máxima es 5 sobre la dirección $(2,1)$.

Ejercicio 15 $J_h(0,0) = (1 \quad 2)$.

Ejercicio 16.- $D_{\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}} f(0,0) = 0$.

Para el resto de direcciones $D_\theta f(0,0) = \dfrac{\cos(\theta)\operatorname{sen}^3(\theta)}{\cos^2(\theta) - \operatorname{sen}^2(\theta)}$.

Ejercicio 17 Los vectores son $(1,0), (-1,0), (0,1), (0,-1), (1,-1)$ y $(-1,1)$.

Ejercicio 18

18.1.- $\bigtriangledown f(p) = (5,-3)$.
18.2.- $\{(u_1,u_2) \in I\!R^2 \mid 5u_1 - 3u_2 = 6\}$.
18.3.- 34.

Ejercicio 19 En las direcciones $(1,1)$ y $(-1,-1)$.

Ejercicio 20 En las direcciones $(1,-1)$ y $(-1,1)$.

Ejercicio 21 Es continua en $I\!R^2$.
Existen las derivadas parciales en todos los puntos.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2y^3}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^3}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Es diferenciable en $I\!R^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Ejercicio 23

23.1.- Fuera del origen $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{yx^4 + 4x^2y^3 - y^5}{(x^2+y^2)^2}$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{x^5 - 4x^3y^2 - xy^4}{(x^2+y^2)^2}$.

23.3.- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 1$ y $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = -1$.