

PROBLEMAS DE LÍMITES

1.- Hallar los límites iterados y los límites siguientes:

- 1) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^4}$.
- 2) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 - y^4}{x^2 - y^2}$.
- 3) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right)$.
- 4) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$.
- 5) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$.
- 6) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$.
- 7) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{x + y - 1}{\sqrt{x} - \sqrt{1 - y}}$.
- 8) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\text{sen}(xy)}{xy}$.
- 9) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(x \cos \left(\frac{1}{x^2 + y^2} \right) \right)$.
- 10) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\text{sen}(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$.
- 11) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\log(1 + x)}{e^y - 1}$.
- 12) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1 - \cos(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)x^2 y^2}$.
- 13) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\log(1 + \text{sen}^2(x))^{\tan(x)}}{\text{arcsen}(x^2(1 - \cos(\sqrt{y})))}$.

2.- Hallar los siguientes límites:

- 1) $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \left(\log(x + y - 1), \frac{x+y-2}{|x+y-2|} \right)$.
- 2) $\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ \{(x,y) \mid x-y=0\}}} \text{sen}(x + y)$.
- 3) $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,1)} \sqrt{1 - x^2 - 4y^2 - 36z^2}$.
- 4) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x \text{sen} y, x^2 e^{-y^2})$.
- 5) $\lim_{\substack{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0) \\ \{(x,y,z) \mid x=2y^2, z=3x^2\}}} f(x, y, z), \text{ donde } f(x, y, z) = \begin{cases} x^2 + y^2 + 2 & \text{si } x \geq 0 \\ x^2 + z^2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$.

$$6) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y), \text{ donde } f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^2} & \text{si } x + y < 0 \\ 1 & \text{si } x + y = 0 \\ \log(x + y + 1) & \text{si } x + y > 0 \end{cases}.$$

$$7) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(\frac{xy - x + y}{x + y}, \frac{\log|x|}{\cos(x + 2y)}, x^2 + y^5 - 2 \right).$$

$$8) \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (1,0) \\ \Gamma}} f(x,y), \text{ donde } f(x,y) = \begin{cases} \frac{x + y - 1}{\sqrt[3]{x^3 + y^3 - 1}} & \text{si } (x,y) \neq (1,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (1,0) \end{cases}$$

$$\text{con } \Gamma_1 = \{(x,y) \mid x = 1\},$$

$$\Gamma_2 = \{(x,y) \mid x = y + 1\} \text{ y}$$

$$\Gamma_3 = \mathbb{R}^2.$$

$$9) \lim_{(x,y) \rightarrow (\pi, 2\pi)} \text{sen} \left(\frac{x}{y} \pi \right).$$

$$10) \lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} f(x,y), \text{ donde } f(x,y) \text{ es la funci3n del apartado 8).}$$

$$11) \lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} f(x,y), \text{ donde } f(x,y) = \begin{cases} \frac{x + y - 2}{\sqrt[3]{x^3 + y^3 - 2}} & \text{si } (x,y) \neq (1,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (1,0) \end{cases}.$$

$$12) \lim_{(x,y) \rightarrow (2,1)} \frac{x + y}{x^2 - 2xy}.$$

$$13) \lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{3x^2}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

$$14) \lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{x + y + z}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

$$15) \lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

$$16) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2x^2 \text{sen} y}{2x^2 + y^2}.$$

$$17) \lim_{\substack{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0) \\ \{(t,t,t) \mid t \in \mathbb{R}\}}} \left(x - y, \text{sen} \left(\frac{\pi z}{x + y} \right) \right).$$

$$18) \lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \left(x - y, \text{sen} \left(\frac{\pi z}{x + y} \right) \right).$$

$$19) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(\frac{\text{sen}(\pi x)}{y}, \frac{y}{x} \right).$$

$$20) \lim_{(x,y,z) \rightarrow (-1,1,1)} f(x,y,z), \text{ donde } f(x,y,z) = \begin{cases} \frac{x^2}{y^2 + z^2} & \text{si } x \leq 0 \\ \text{sen} \left(\frac{x^2}{y^2} \right) z^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}.$$

$$21) \lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} f(x,y,z), \text{ para la funci3n } f(x,y,z) \text{ del apartado 20).}$$

$$22) \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (1,0) \\ \{(t+1,t^2) \mid t \in \mathbb{R}\}}} \left(\frac{\tan(xy)}{xy}, \frac{y}{x} \right).$$

$$23) \lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} f(x,y,z), \text{ donde } f(x,y,z) = \begin{cases} e^{\frac{x^2+y^2}{z}} & \text{si } xy < 0 \\ \log\left(\frac{xy}{z}\right) & \text{si } xy = 0 \\ \tan(x^2 + z^2 + x + \frac{\pi}{4}) & \text{si } xy > 0 \end{cases}$$

$$24) \lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,1,0)} \frac{xy}{x^2 + z^2}.$$

$$25) \lim_{(x,y,z) \rightarrow (1,0,0)} \frac{x^2 + y^2 + z^2 - 1}{z}.$$

3.- Demostrar que los siguientes límites no existen.

$$1) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 + 3x^2y^2 + 2xy^3}{(x^2 + y^2)^2}.$$

$$2) \lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{2x - y}{4x^2 + y^2 - 4xy}.$$

4.- Demostrar que las siguientes funciones de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R} tienen límite en el origen a lo largo de cualquier recta $x = \lambda y$, pero no tienen límite en dicho punto:

$$f_1(x,y) = \begin{cases} \frac{y}{x^2 + y} & \text{si } y \neq -x^2 \\ 1 & \text{si } y = -x^2 \end{cases} \quad f_2(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3y}{x^9 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$