PROBLEMAS DE INTEGRABILIDAD

1.- Para las funciones siguiente decidir si son integrables sobre I, y en caso afirmativo calcula su integral:

1) $f(x,y) = \begin{cases} x & \text{si } -1 \leq x \leq y \leq 1 \\ y-1 & \text{si } -1 \leq y < x \leq 1 \end{cases}$ sobre $I = [-1,1] \times [-1,1]$.

2) $f(x,y) = \begin{cases} -1 & \text{si } (x,y) \in [0,1] \times \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ \\ 1 & \text{si } (x,y) \in [0,1] \times \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$ sobre $I = [0,1] \times [0,1]$.

2.- ¿Es integrable la función $f(x,y) = x^2 + y^2$ en $D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 25\}$? En caso afirmativo, calcula la integral.

3.- Expresar en sentido inverso las siguientes integrales iteradas.

1) $\int_0^3 \left(\int_{x^2}^{18-x^2} f(x,y)dy \right) dx.$

2) $\int_0^4 \left(\int_y^{10-y} f(x,y)dx \right) dy.$

4.- Calcular las siguientes integrales dobles.

1) $\iint_{I_1} (4xy)dxdy$ donde $I_1 = [0,b] \times [0,d]$.

2) $\iint_{D_2} (x^2 + y)$ donde $D_2 = \{(x,y) \in I\!R^2 \mid 0 \leq x \leq 1, \;\; x^2 \leq y \leq x\}$ y $D_2 = \{(x,y) \in I\!R^2 \mid 0 \leq y \leq 1, \;\; y^2 \leq x \leq y\}$.

3) $\iint_{D_3} \dfrac{x^3 \tan y^2 \text{sen}(x^2 + y^2)}{x^2 + y^4 + 1} dxdy$ donde $D_3 = \{(x,y) \in I\!R^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.

4) $\iint_{D_4} \dfrac{dxdy}{x+y}$ donde D_4 es el paralelogramo delimitado por las rectas $y + x = 1/5$, $y + x - 1 = 0$, $y = 2x$ e $y - 2x + 3 = 0$.

5) $\iint_{D_5} \cos\left(\dfrac{x-y}{x+y}\right) dxdy$ donde D_5 es la región delimitada por las rectas $x = 0$, $y = 0$ y $x + y = 1$.

PISTA: Se sugiere el cambio de variable $x = u + v, y = v - u$.

6) $\iint_{D_6} (4e^{x^2} - 5\text{sen}y)dxdy$ donde D_6 es la región limitada por las rectas $y = x$, $y = 0$ y $x = 4$.

7) $\iint_{D_7} (xe^y)dxdy$ donde D_7 es la región limitada por las gráficas de $x = y^2$ y $x = 2 - y$.

8) $\iint_{D_8} f_8(x,y)dxdy$ donde $f_8(x,y) = \begin{cases} 2xy^2 + 2y\cos x & \text{si } x \geq 0 \\ 1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$ y D_8 es la región limitada por las gráficas de $y = \sqrt{x}$, $x = 0$ e $y = 3$.

9) $\iint_{D_9} (2x - y)dxdy$ donde D_9 está limitada por $y = \text{sen}x$, $y = 1 - x^2$, $x = -1$ y $x = 0$.

10) $\iint_{D_{10}} ydxdy$ donde D_{10} está limitada por $x = 4 - y^2$ y $x = 0$.
11) $\iint_{D_{11}} (x^2 + y^2 + 3)dxdy$ donde $D_{11} = \{(x, y) \in I\!R^2 \mid x^2 + y^2 \leq 2\}$.
12) $\int_{-1}^{1} \left(\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} (x^2(x^2 + y^2)^2)dy \right) dx$.
13) $\iint_{D_{13}} ydxdy$ donde D_{13} está limitada por $r = 2 - \text{sen}\theta$.
14) $\iint_{D_{14}} xdxdy$ donde D_{14} está limitada por $r = 1 - \cos\theta$.
15) $\iint_{D_{15}} e^{x+y}dxdy$ donde $D_{15} = \{(x, y) \in I\!R^2 \mid |x| + |y| \leq 1\}$.
16) $\iint_{D_{16}} e^{\frac{x}{y}}dxdy$ donde $D_{16} = \{(x, y) \in I\!R^2 \mid x \leq y^2,\ 0 \leq y \leq 1,\ x \geq 0\}$.
17) $\iint_{D_{17}} \max(x, y)dxdy$ donde $D_{17} = [0, 1] \times [0, 1]$.
18) $\iint_{D_{18}} \sqrt{x^2 + y^2}dxdy$ donde $D_{18} = \{(x, y) \in I\!R^2 \mid 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9\}$.
19) $\int_{0}^{\pi} \left(\int_{x}^{\pi} \frac{\text{sen}y}{y} dy \right) dx$.
20) $\iint_{D_{20}} (x^2 + y^2)dxdy$ donde $D_{20} = \{(x, y) \in I\!R^2 \mid x^2 + 4y^2 \leq 4,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$.
21) $\iint_{D_{21}} e^{-(x^2+y^2+xy)}dxdy$ donde $D_{21} = \{(x, y) \in I\!R^2 \mid x^2 + y^2 + xy \leq 1\}$.
PISTA: Se sugiere el cambio de variable $x = u - \frac{1}{\sqrt{3}}v, y = \frac{1}{\sqrt{3}}v$.

22) $\iint_{D_{22}} ((x-y)^2\text{sen}^2(x+y))dxdy$ donde D_{22} es el paralelogramo de vértices $(\pi, 0)$, $(2\pi, \pi)$, $(\pi, 2\pi)$ y $(0, \pi)$.
PISTA: Se sugiere el cambio de variable $u = x - y, v = x + y$.
23) $\iint_{D_{23}} e^{\frac{x^2+y^2}{2x}} dxdy$ donde D_{23} es el círculo unidad con centro en el punto $(1, 0)$.
24) $\int_{-1}^{1} \left(\int_{|x|}^{1} dy \right) dx$.
25) $\iint_{D_{25}} e^{\frac{x-y}{2}}$ donde D_{25} es el triángulo de vértices $(0, 0)$, $(1, 3)$ y $(1, 2)$.

5.- Demostrar la identidad $\int_{0}^{x} \left(\int_{0}^{t} F(u)du \right) dt = \int_{0}^{x} ((x - u)F(u))du$.

6.- Calcular la integral de la función $f(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} e^{\sqrt{x^2+y^2}}$ sobre los siguientes recintos.

1) $D_1 = \{(x, y) \in I\!R^2 \mid x^2 + (y - 1)^2 \leq 1\}$.
2) $D_2 = \{(x, y) \in I\!R^2 \mid x^2 + (y - 1)^2 \leq 1,\ x \geq 0\}$.

7.- Calcular las siguientes integrales triples.

1) $\iiint_{D_1} (6xy)dxdydz$ donde D_1 es el tetraedro limitado por los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ y $2x + y + z = 4$.
2) $\iiint_{D_2} (\sqrt{y} - 3z^2)dxdydz$ donde
$D_2 = \{(x, y, z) \in I\!R^3 \mid 2 \leq x \leq 3,\ 0 \leq y \leq 1,\ -1 \leq z \leq 1\}$.
3) $\iiint_{D_3} \frac{2x + y + z}{x + 1} dxdydz$ donde
$D_3 = \{(x, y, z) \in I\!R^3 \mid 0 \leq x \leq 2,\ -2 \leq y \leq 2,\ 0 \leq z \leq 2\}$.

4) $\iiint_{D_4} \dfrac{z}{x^2+y^2}dxdydz$ donde D_4 está limitada por el cono $y=\sqrt{x^2+z^2}$ y el plano $y=3$.

5) $\iiint_{D_5} e^{x^2+y^2}dxdydz$ donde D_5 es el sólido limitado por el cilindro $x^2+y^2=9$ y los planos $z=0$ y $z=5$.

6) $\iiint_{D_6}(z\sqrt{x^2+y^2})dxdydz$ donde $D_6=\{\sqrt{x^2+y^2}\le z\le\sqrt{18-x^2-y^2}\}$.

7) $\iiint_{D_7}\cos(\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3})dxdydz$ donde D_7 es la esfera unitaria.

8) $\iiint_{D_8}\sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz$ donde
$D_8=\{(x,y,z)\in I\!R^3 \mid \sqrt{x^2+y^2}\le z\le\sqrt{18-x^2-y^2}\}$.

9) $\iiint_{D_9}\dfrac{dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ donde
$D_9=\{(x,y,z)\in I\!R^3 \mid 1\le x^2+y^2+z^2\le 4,\ z^2\ge x^2+y^2,\ z\ge 0\}$.

10) $\iiint_{D_{10}}(xy-1)dxdydz$ donde $D_{10}=\{(x,y,z)\in I\!R^3 \mid 0\le z\le 4-4(x^2+y^2),\ x,y\ge 0\}$.

11) $\iiint_{D_{11}} e^{-(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}dxdydz$ donde
$D_{11}=\{(x,y,z)\in I\!R^3 \mid z\ge\sqrt{x^2+y^2},\ x^2+y^2+z^2\le 9\}$.

12) $\iiint_{D_{12}}\sqrt{9-x^2-y^2}dxdydz$ donde $D_{12}=\{(x,y,z)\in I\!R^3 \mid z\ge\sqrt{x^2+y^2},\ z\le 3\}$.

8.- Calcular el área de las siguientes regiones.

1) D_1 es la región delimitada por $\{g(t)\in I\!R^2 \mid -1\le t\le 3\}$ donde
$$g(t)=\begin{cases}(t,0) & \text{si } -1\le t\le 0\\ (t,t^2) & \text{si } 0\le t\le 1\\ (2-t,\dfrac{3-t}{2}) & \text{si } 1\le t\le 3\end{cases}\quad \text{e } y=0.$$

2) D_2 es la región delimitada por $\{(x,y)\in I\!R^2 \mid y=\mathrm{sen}2x,\ 0\le x\le p\}$ donde $p\le\pi$ e $y=0$.

3) $D_3=\{(x,y)\in I\!R^2 \mid y^2\le 4x,\ x^2+y^2\le 5\}$.

4) $D_4=\{(x,y)\in I\!R^2 \mid y^2\ge 4x,\ x^2+y^2\le 5\}$.

5) D_5 es la región delimitada por $y=x^3+x^2$ e $y=2x$.

6) D_6 es la región delimitada por $x=-3,\ x=0,\ x+2y=3$ e $y=-(x+2)^2$.

9.- Calcular el volumen de los siguientes conjuntos de $I\!R^3$.

1) $D_1=\{(x,y,z)\in I\!R^3 \mid x^2+y^2+z^2\le a^2,\ x^2+y^2\le z^2\}$.

2) $D_2=\left\{(x,y,z)\in I\!R^3 \mid \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\le 1\right\}$.

3) $D_3=\{(x,y,z)\in I\!R^3 \mid x^2+y^2\le 4,\ x^2+y^2+z^2\le 16\}$.

4) $D_4=\{(x,y,z)\in I\!R^3 \mid z\le x^2+y^2,\ x^2+y^2\le 4,\ z\ge 0\}$.

5) $D_5=\{(x,y,z)\in I\!R^3 \mid x^2+y^2\le 4,\ z\le x,\ y\le x,\ x,y,z\ge 0\}$.

6) $D_6=\left\{(x,y,z)\in I\!R^3 \mid 0\le z\le\dfrac{4-x^2-y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}},\ (x-1)^2+y^2\le 1,\ x^2+y^2\ge 1\right\}$.