PROBLEMAS DE EXTREMOS RELATIVOS

1.- Sea $f(x,y)=a(2xy+y^2+yx^2+\cos(x+y))+x^2(a^2-y)$. Discutir la existencia de extremos relativos de f en el origen según los valores de $a\in I\!R$.

2.- Sean $f: I\!R \longrightarrow I\!R$ y $g: I\!R^2 \longrightarrow I\!R$ ambas de clase C^2. Si se construye $h=f\circ g$, analizando únicamente la matriz jacobiana y la hessiana. ¿En qué casos los puntos para los que g produce máximos (mínimos) la función h produce máximos?

3.- Dada $g(x,y)=\sqrt{f(x,y)}$, siendo $f(x,y)=x^2y^2-x^3y$.

1) Calcular el dominio de g.
2) Demostrar que $g(0,0)$ es un mínimo absoluto de $g(x,y)$ sobre su dominio.
3) Demostrar que $f(0,0)$ no es extremo relativo ni absoluto de $f(x,y)$ en $I\!R^2$.

4.- Determinar el valor de k para que las siguientes funciones tengan un maxímo o un mínimo relativo en $(0,0)$.

1) $f_1(x,y)=x^2+kxy+9y^2$.
2) $f_2(x,y)=-ke^{x^2+y^2}$.

5.- Sea $f(x,y)=\begin{cases} y^2-x^2 & \text{si } x\geq 0 \\ (x+1)^2+y^2 & \text{si } x<0 \end{cases}$. Dibujar las curvas de nivel para $c=0$, y analizar si $f(0,0)$ es extremo relativo.

6.- Encontrar los extremos relativos de $f(x,y)=ax^2+2bxy+cy^2+dx+ey+g$, según los valores de $a,b,c,d,e,g\in I\!R$, cuando $4ac-b^2\neq 0$.

7.- Hallar los extremos relativos de las siguientes funciones. Clasifica cada uno de ellos.

1) $f_1(x,y)=(x^2+y^2)^2-2a^2(x^2-y^2)$ con $a\neq 0$.
2) $f_2(x,y)=x^4+y^4+6x^2y^2+8x^3$.
3) $f_3(x,y)=\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}$ con $p,q\neq 0$.
4) $f_4(x,y)=\operatorname{sen} x+xy$.
5) $f_5(x,y)=x^2+x^4y+y^3-y$.
6) $f_6(x,y)=x^4+y^4-2x^2+4xy-2y^2$.
7) $f_7(x,y)=x^3+3xy^2-15x-12y$.
8) $f_8(x,y)=xye^{x+2y}$.
9) $f_9(x,y)=\dfrac{x-y}{x^2+y^2+1}$.
10) $f_{10}(x,y,z)=xy+yz+xz$.
11) $f_{11}(x,y)=x^3-3xy+y^3$.
12) $f_{12}(x,y)=e^{xy}$.
13) $f_{13}(x,y)=x^3+y^3-9xy+27$.
14) $f_{14}(x,y)=xe^y-e^x$.
15) $f_{15}(x,y)=\log(x^2+y^2+1)$.
16) $f_{16}(x,y)=4xy-x^4-y^4$.

17) $f_{17}(x,y) = xy + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$.
18) $f_{18}(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$.

8.- Sea $f(x,y) = (x^2 - y)(3x^2 - y)$.

1) Demostrar que sobre toda recta de la forma $y = \lambda x$, la función f tiene un mínimo relativo en el origen.
2) Dibujar el conjunto de puntos en los que $f(x,y) > 0$ y en los que $f(x,y) < 0$, y deduce que f no posee extremos relativos en el origen.

9.- Hallar los máximos y mínimos absolutos de las siguientes funciones, en los conjuntos indicados.

1) $f_1(x,y) = x^4 + y^4 + 6x^2y^2 + 8x^3$, en $A_1 = \{(x,y) \in I\!R^2 \mid 0 \le y \le 3,\ -1 \le x \le 1\}$.
2) $f_2(x,y) = x^4 + y^4 + 6x^2y^2 + 8x^3$, en $A_2 = \{(x,y) \in I\!R^2 \mid 0 \le y \le 3,\ x = 1\}$.
3) $f_3(x,y,z) = x\mathrm{sen}(y)\log z$, en $A_3 = \{(x,y,z) \in I\!R^3 \mid 0 \le x+y \le \pi,\ 0 \le x-y \le \pi,\ 1 \le z \le 2\}$.
4) $f_4(x,y,z) = x + 2y + 3z$ en $A_4 = \{(x,y,z) \in I\!R^3 \mid x^2 + y^2 = 2,\ x + z = 1\}$.
5) $f_5(x,y) = -x^2 + xy + y^2 - 6x$ en $A_5 = \{(x,y) \in I\!R^2 \mid 0 \le x \le 5,\ -3 \le y \le 3\}$.
6) $f_6(x,y) = xy^2$ en $A_6 = \{(x,y) \in I\!R^2 \mid x \ge 0,\ y \ge 0,\ x^2 + y^2 \le 1\}$.
7) $f_7(x,y,z) = x + y + z$ en $A_7 = \{(x,y,z) \in I\!R^3 \mid x^2 + y^2 \le z \le 1\}$.
8) $f_8(x,y) = x^2 + y^2$ en $A_8 = \{(x,y) \in I\!R^2 \mid y + x^2 = 1\}$.
9) $f_9(x,y) = x^2 + y^2 - xy + x + y$ en $A_9 = \{(x,y) \in I\!R^2 \mid x \le 0,\ y \le 0,\ x + y \ge -3\}$.
10) $f_{10}(x,y,z) = x + y + z$ en $A_{10} = \{(x,y,z) \in I\!R^3 \mid x^2 + y^2 + 3z^2 = 1\}$.

10.- Estudiar si los puntos $(0,0,0)$, $(1,2,3)$ y $(2\sqrt{6}, 2\sqrt{3}, 2\sqrt{2})$ son extremos relativos de la función $f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - xyz$. Encuentra el resto de los extremos relativos.

11.- Demostrar que la función $f(x,y) = (x+1)^2 + y^2$ tiene un mínimo condicionado a la relación $y^2 = x^3$ en el punto $(0,0)$. Demuestra también que no existe λ que verifique las ecuaciones de Lagrange. ¿Existe alguna contradicción?

12.- ¿Cuál es el punto de la curva $y^2 = x^3$ más próximo al punto $(-1,0)$?

13.- Sea la curva interseccion $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ y el plano $x + y + z = 1$. Calcular los puntos de la intersección que estan más cerca y más lejos del punto $(1,2,3)$. Justificar que los valores obtenidos sean máximos y mínimos.

14.- Demostrar que el punto (0,0) es un punto crítico para la función $\mathrm{sen}(x^2 + y^2)$. Decidir qué tipo de punto es.

15.- Calcular el máximo y mínimo de la función $x^3 + y^3$ sobre la elipse $x^2 + 4y^2 = 1$.

16.- Dada la función $f(x,y) = x^2 + xy - y^2$, hallar los extremos de esta función, sujeta a la condición $x^2 + xy + y^2 = 1$.

17.- Demostrar que el máximo de $x + 3y$ en el conjunto $2x^2 + y^2 \leq 38$ es 19 y se alcanza en un punto de la frontera.

18.- Demostrar que el valor máximo y mínimo absoluto de la función $4x^2 - y^2 - 4$ en el recinto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 \leq y \leq 8 - x^2\}$ es 0 y -68.

19.- Demostrar que el valor máximo y mínimo absoluto de la función $x^2 - y^2$ en el círculo de radio $\frac{1}{3}$ es $\frac{1}{9}$ y $\frac{1}{9}$, respectivamente.

20.- Una caja rectangular descansa sobre el primer cuadrante del plano XY con los ejes paralelos a los ejes y uno de sus vértices descansando sobre el origen entonces el volumen máximo de la caja cuyo vértice opuesto decansa sobre el plano $x + y + z = 2$ es $\frac{8}{27}$.

21.- La función $x^3 - 3x^2 - 2xy + 6x + 2y + 1$ tiene un punto de silla en el punto $\left(1, \frac{3}{2}\right)$.

22.- Calcular la mínina distancia del origen a las superfcies.

1) $xy^2z^3 = 2$.
2) $x^2 - yz + y = 5$.

23.- Calcular las distancias máxima y mínima del origen a la elipse $5x^2 + 6xy + 5y^2 = 8$.

24.- Representa un número real positivo a como producto de cuatro factores positivos cuya suma sea mínima.

25.- Sea el conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 4y^2 = 4\}$.

1) Demostrar que A es compacto en $\mathbb{R}^2$.
2) Calcular el valor máximo y el mínimo de $f(x, y) = xy$ sobre A y los puntos sobre los que se alcanzan.
3) Comprobar el resultado obtenido utilizando curvas de nivel de la función f.