PROBLEMAS DE DIFERENCIABILIDAD

1.- Calcular las derivadas parciales, si existen, de las siguientes funciones en $I\!R^n$ en los puntos indicados.

1) $f_1(x,y) = \begin{cases} x^2 - y^3 & \text{si } y > 0 \\ x^2 + y^3 & \text{si } y \leq 0 \end{cases}$, en los puntos $(0,0), (1,0)$ y $(0,1)$.

2) $f_2(x,y) = \dfrac{e^{xy}}{xy}$, en un punto arbitrario (x_0, y_0).

3) $f_3(x,y) = \dfrac{x^2}{x^2+y^2}$ en los puntos $(0,1)$ y $(2,0)$.

4) $\overline{f}_4(x,y,z) = \left(\dfrac{x}{y}, \dfrac{x+y^2}{x-2}\right)$ en los puntos $(0,1)$ y $(2,1)$.

5) $\overline{f}_5(x,y,z) = \left((x+y)\log(x^2+y^2), \text{arcsen}\dfrac{z}{x^2+z^2}\right)$, en el punto $(1,1,0)$.

6) $\overline{f}_6(x,y,z) = \left(\tan(x+y), 4xe^{y-z}, \dfrac{x^3}{y} + \text{sen}z\right)$, en el punto $(1,-1,\pi)$.

7) $\overline{f}_7(x,y) = (x\cos x \text{sen} y, e^{xy})$, en un punto arbitrario (x_0, y_0).

8) $f_8(x,y) = (x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)$, en el punto $(e,0)$.

9) $\overline{f}_9(x,y,z) = \left(\arctan\left(\dfrac{2x}{y^2+z^2}\right), e^{x^2+y^2+z^2}\right)$, sobre un punto arbitrario (x_0, y_0, z_0).

10) $f_{10}(x,y) = \sqrt{a^2-x^2-y^2}$ en el punto $\left(\dfrac{a}{2}, \dfrac{a}{2}\right)$ con $a \neq 0$.

11) $f_{11}(x,y) = x^2\text{sen}y + y\cos x$ en un punto arbitrario (x_0, y_0).

12) $f_{12}(x,y) = e^x\cos y + \text{sen}x \tan y$ en el punto $(0,0)$.

13) $f_{13}(x,y,z) = e^{x+y+z}$ en el punto $(1,2,3)$.

14) $\overline{f}_{14}(x,y) = (x^2+y, \text{sen}x + \cos y, e^{xy})$ en el punto $(0,0)$.

15) $f_{15}(x,y) = x^{x^{x^y}}$ en el punto $(1,0)$.

2.- ¿Cuáles de las funciones anteriores son diferenciables en los puntos indicados? Para aquellas que sean diferenciables, calcula su diferencial.

3.- Calcular la derivada direccional de las siguientes funciones en el punto indicado y según la dirección del vector dado.

1) $f_1(x,y) = e^{xy} + y\arctan x$ en el punto $(0,0)$ y dirección $(1,-1)$.

2) $f_2(x,y) = \sqrt{3y^2 - x^2 - 2xy}$ en el punto $(3,4)$ y dirección $(3,4)$.

3) $\overline{f}_3(x,y,z) = \left(x^2 - z, z - \cos\left(\dfrac{z}{x}\right)\right)$ en el punto $(2,0,2\pi)$ y dirección $(1,0,1)$.

4) $f_4(x,y) = (x^2+y^2, xy)$ en el punto $(2,4)$ y dirección $\dfrac{3\pi}{2}$.

5) $f_5(x,y,z) = x\cos(yz)$ en el punto $(0,0,0)$ y dirección $(2,1,-2)$.

6) $f_6(x,y) = 2x^3y - 3y^2$ en el punto $(2,1)$ y dirección $(a, \sqrt{1-a^2})$.
Hallar a para que esta derivada sea máxima.

4.- Calcular la matriz jacobiana de las siguientes funciones.

1) $\overline{f}_1(x,y) = (x^y, \log(xy), 2x)$.
2) $\overline{f}_2(x) = (xe^x, \cos(\cos(x)))$.
3) $f_3(x,y,z) = x^2\log(z) + y\sqrt{x} - xyz$.
4) $\overline{f}_4(x,y,z) = (xyz, xy, x)$.
5) $\overline{f}_5(x,y,z) = (2x + 4y - z, 6x - 3y - 4z)$.

5.- Sea la función $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^4+y^4} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$. Demostrar que existen las derivadas parciales en en origen, sin embargo no es continua en dicho punto.

6.- Estudia la diferenciabilidad de las siguientes funciones en el punto $(0,0)$.

1) $f_1(x,y) = \begin{cases} x\cos\dfrac{1}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

2) $f_2(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\text{sen}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

3) $f_3(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

4) $f_4(x,y) = \sqrt{|xy|}$.
5) $f_5(x,y) = |xy|^a$ según los valores de $a \in \mathbb{R}$.
6) $f_6(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2+y^2} & \text{si } x^2+y^2 > 1 \\ 1 & \text{si } x^2+y^2 \leq 1 \end{cases}$.
7) $f_7(x,y) = \dfrac{\text{sen}(x^3y)}{x^2y^2+1}$.

8) $f_8(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

9) $f_9(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x+y}{\sqrt{x^6+y^6}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ x+y & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

7.- Calcula el gradiente de la función $f(x,y,z) = \int_{xy}^{\text{sen}(x\text{sen}(y\text{sen}(z))}\psi(t)dt$ en el punto $(0,0,0)$.

8.- Sea $f(x,y) = 2e^{-x^2} + e^{-3y^2}$ la altura de una montaña en la posición $(x,y) \in I\!R^2$. ¿En qué dirección desde $(1,0)$ se debería comenzar a caminar para escalar lo más rápido posible?

9.- Se considera la función $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

1) Estudiar la continuidad y la existencia de derivadas parciales.
2) Hallar la derivada direccional en una dirección arbitraria θ en el punto $(0,0)$.
3) ¿Es diferenciable la función en el punto $(1,2)$? En caso afirmativo, calcular la diferencial.

10.- Encontrar una aproximación polinómica hasta grado 3 de las siguientes funciones.

1) $f_1(x,y) = \log(1+x+y)$ alrededor del punto $(0,0)$.
2) $f_2(x,y) = x^3 + 3x^2y + 9xy^2 - 5x^2$ alrededor del punto $(1,2)$.
3) $f_3(x,y,z) = e^{x-y-zy}$ alrededor del punto $(2,1,1)$.

11.- Calcular la matriz hessiana de las siguientes funciones en los puntos indicados.

1) $f_1(x,y,z) = x^2\tan(xz) - y^{3/2}$, en el punto $(1,2,\pi)$.
2) $f_2(x,y) = \arctan(\log(e^{x+2y}))$, en el punto $(0,0)$.
3) $f_3(x,y,z) = ze^{\operatorname{sen}(x^2)+\sqrt[3]{y^4}}$, en el punto $(0,1,0)$.

12.- Escribir la ecuación del plano tangente a la superficie $z = rcos(3\theta)$ (coordenadas cilíndricas), en el punto correspondiente a $r = 1, \theta = \dfrac{\pi}{2}$.

13.- Sea $f(x,y) = \sqrt{xy}$.

1) Usando definición de derivada direccional demostrar que las derivadas parciales en el origen son 0 y que $(1,0), (-1,0), (0,1)$ y $(0,-1)$ son las únicas direcciones para las cuales existe derivada direccional en el origen.
2) ¿Es continua en $(0,0)$?
3) ¿Es diferenciable $(0,0)$?

14.- Sean $f(x,y) = 2x + y$, $g(x,y) = 1 + \sqrt{|xy|}$. Demostrar que g no es diferenciable en el origen, pero que $h(x,y) = (f \cdot g)(x,y)$ sí lo es. Calcular la derivada direccional máxima de h en el origen. ¿En qué dirección es máxima?

15.- Sean $\overline{f}(x,y) = (y + \cos(x), x + e^y)$, $g(x,y) = x + y$. Demostrar que f y g son diferenciables en $I\!R^2$. Calcular la matriz jacobiana de la función compuesta $h = g \circ f$ en el punto $(0,0)$.

16.- Sea $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2-y^2} & \text{si} \quad |x| \neq |y| \\ 0 & \text{si} \quad |x| = |y| \end{cases}$. Demostrar que f es derivable en toda dirección en el origen, pero no es diferenciable en dicho punto.

17.- Sea $f(x,y) = \begin{cases} \sqrt{xy} & \text{si} \quad xy \geq 0 \\ x+y & \text{si} \quad xy < 0 \end{cases}$. Hallar los seis vectores para los cuales la derivada direccional en $(0,0)$ es nula.

18.- Sea : $I\!R^2 \longrightarrow I\!R$ diferenciable en un punto $p \in I\!R^2$. Supongamos que $D_v f(p) = 1$ y que $D_w f(p) = 2$, siendo $v = (2,3)$ y $w = (1,1)$.

1) Calcular el gradiente de f en el punto p.
2) Representar el conjunto de todos los vectores u para los que $D_u f(p) = 6$.
3) Calcular el máximo de la derivada direccional de f en p.

19.- ¿En que dirección la derivada direccional de la función $f(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ sobre el punto $(1,1)$ es igual a cero.

20.- Hallar las direcciones para las cuales la función $f(x,y) = |x+y|$ tiene derivadas direccionales en el punto $(1,-1)$.

21.- Demostrar que la función $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$ es continua, diferenciable y que tiene derivadas parciales.

22.- Demostrar que la derivada direccional de la función $f(x,y) = 2x^2 + 2y^2 - 4zy + z + 2\text{sen}(yx - x)$ en el punto $(1,1,1)$ en su direccion de máximo crecimiento es 36.

23.- Sea $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

1) Calcular las derivadas parciales fuera del origen.
2) Demostrar que las derivadas parciales en el origen son 0.
3) Calcular $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ y $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$. Dar una breve explicación de estos resultados.