PROBLEMAS DE CONTINUIDAD

1.- Estudiar la continuidad de las siguientes funciones en $I\!R^n$:

1) $f_1(x,y) = \begin{cases} x^2 - y^3 & \text{si } y > 0 \\ x^2 + y^3 & \text{si } y \le 0 \end{cases}$.

2) $f_2(x,y) = \dfrac{e^{xy}}{xy}$.

3) $f_3(x,y) = \dfrac{x^2}{x^2+y^2}$ en los conjuntos $A = \{(x,y) \mid 0 < x^2+y^2 < 1\}$ y $B = \{(x,y) \mid 0 < x^2+y^2 < 1,\ x \neq 0\}$.

4) $f_4(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^a}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq 0 \\ 0 & \text{si } (x,y) = 0 \end{cases}$ para $a = 1, 2, 3$.

5) $f_5(x,y,z) = \left((x+y)\log(x^2+y^2), \operatorname{arcsen} \dfrac{z}{x^2+z^2} \right)$.

6) $f_6(x,y,z) = \left(\tan(x+y), 4xe^{y-z}, \dfrac{x^3}{y} + \operatorname{sen} z \right)$.

7) $f_7(x,y,z) = \begin{cases} \left(\log\left(\dfrac{x^2+y^2}{1-z^2} \right), z \right) & \text{si } x^2+y^2+z^2 = 1 \\ (0,z) & \text{si } x^2+y^2+z^2 \neq 1 \end{cases}$.

8) $f_8(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{si} \quad x+y < 0 \\ 0 & \text{si} \quad x+y = 0 \\ \log(x+y+1) & \text{si} \quad x+y > 0 \end{cases}$.

9) $f_9(x,y,z) = \begin{cases} e^{\frac{x^2+y^2}{z}} & \text{si} \quad xy < 0 \\ x+1 & \text{si} \quad xy = 0 \\ \tan(x^2+z^2+x+\frac{\pi}{4}) & \text{si} \quad xy > 0 \end{cases}$.

10) $f_{10}(x,y) = x^4 + y^4 - 4x^2y^2$.

11) $f_{11}(x,y) = \log(x^2+y^2)$.

12) $f_{12}(x,y) = \dfrac{\cos(x^2)}{y}$.

13) $f_{13}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

14) $f_{14}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4+x^2y-y^3}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

15) $f_{15}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2+y^3}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

16) $f_{16}(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x+y}{x-y} & \text{si} \quad x\neq y \\ 0 & \text{si} \quad x=y \end{cases}$

2.- Sea la función $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y)=(0,0) \end{cases}$. Hallar el límite de f en el origen a lo largo de cualquier recta que pase por $(0,0)$. Estudiar si sería posible definir $f(0,0)$ de modo que f fuera continua en el origen.

3.- Dada la función definida por $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x+y}{\sqrt{x^2+y}}\operatorname{arcsen}\left(\dfrac{y}{x}\right) & \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0) \\ (0,0) & \text{si} \quad (x,y)=(0,0) \end{cases}$.

1) Determinar y dibujar su dominio.
2) Calcular los límites iterados en el origen y los límites a lo largo de rectas que pasan por el origen.
3) Calcular los límites en el origen según las curvas $y=x^2+x^6$.
4) Estudiar la continuidad.

4.- Sea la función $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2} & \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0) \\ 1 & \text{si} \quad (x,y)=(0,0) \end{cases}$.

1) Estudiar la continuidad de f.
2) Probar que f está acotada.
3) Probar que f alcanza un máximo absoluto sobre la circunferencia $x^2+y^2=1$ y que este máximo es 1. ¿En qué punto o puntos de la circunferencia se alcanza este máximo?

5.- Dada la función $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x,y)=xy\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right)\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right)$. Redefinirla, si es posible, de modo tal que resulte continua en todo $\mathbb{R}^2$.

6.- Estudiar la continuidad de la función $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x\operatorname{sen}(8x)}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y)=(0,0) \end{cases}$

7.- La función $f(x,y)=x^2+y^2$ es continua en $A=\{(x,y)\,|\,4\leq x^2+y^2<9\}$. ¿Alcanza f máximo y mínimo en A?

8.- Sea $\psi:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ una función continua con derivada continua. Se define la función $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{\psi(x)-\psi(y)}{x-y} & \text{si} \quad x\neq y \\ \psi'(x) & \text{si} \quad x=y \end{cases}$. Estudiar la continuidad de f.

9.- Sea $M = \{(x,y) \in I\!R^2 \mid x^2+y^2 \leq 2x,\ y \leq x\}$ y sea $\overline{f} : I\!R^2 \longrightarrow I\!R^2$ definida por
$$\overline{f}(x,y) = \begin{cases} \left(\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, \operatorname{sen}(x+y)\right) & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ (0,0) & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

1) Estudiar la continuidad de $\overline{f}$ en $I\!R^2$.
2) Estudiar si $\overline{f}(M)$ es compacto.
3) Estudiar si $\overline{f}$ alcanza extremos absolutos sobre M.